

初期剛性が合わない3つの理由

I 何回目の剛性か

1回目特性と2回目以降の剛性は大きく異なる。
更には、へたりを考慮して剛性を求める。

II 形状依存性

測定サンプルでの見かけ算出剛性が異なる。
正しいサンプルを選択する必要がある。

III 硬度、寸法公差

金属と異なりゴム製品の寸法や硬度（基本剛性）は公差が大きく、
場合によっては10%以上異なる。
金属は鉄のヤング率21万MPaに対して1%もずれない。

I 何回目の剛性か

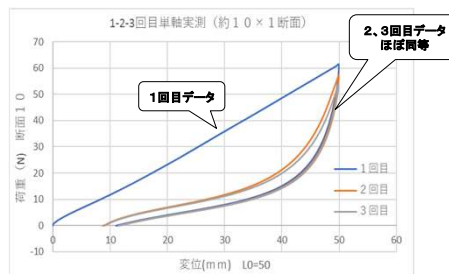
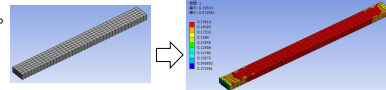
ゴムは、そのままのヤング率で定義しませんが

ヤング率 $E=6 \times C10$ の関係から

最も簡単なネオフック関数 $W=C10(II-3)$ で表される。

単軸試験から正確なヤング率を求めること。

短冊試験

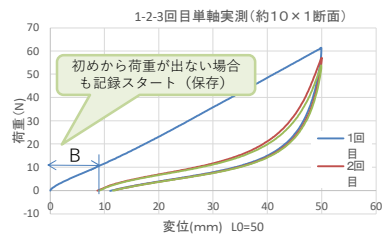
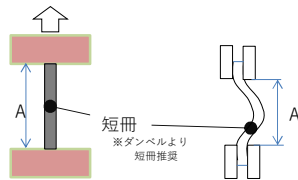


1回目と2回目は大きく異なり、
2回目と3回目は少し異なります。
3回目以降はほぼ重なります。

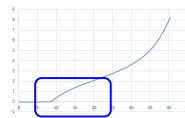
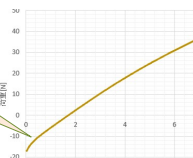
ゴムの3回の伸張データは、上記のように安定性から“3回目のデータとJISでは規定”しています。
しかし、それだけでは解析に使うことが難しいです。/JISは解析用に定義されていません。

ゴム材料の基本知識

単軸試験手順：重要ポイント



へたりから
負の反力検出



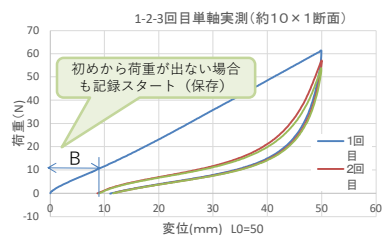
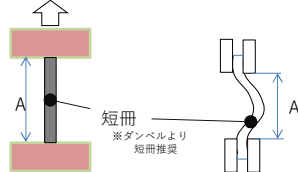
このへたりを行わないと正確なヤング率が求められない。
最も肝になるところです。

© 2022 Terakoya All Rights Reserved.

8

ゴム材料の基本知識

単軸試験手順：重要ポイント



基本となるヤング率の算出

エネルギー関数 $W = C_{10} (I_1 - 3)$

$C_{10} = \text{ヤング率} / 6$ の関係から正しいヤング率を求める必要がある。

$A = 50 \text{ mm}$ とすると、ひずみは変位 ÷ 50、応力 = 荷重 ÷ 断面積

1 回目のヤング率は、そのまま
ヤング率 $E_1 = \text{応力} \div \text{ひずみ}$
そのまま求められる。



2 回目 (3 回目の動揺)
ヤング率は、へたりを考慮して
ひずみ₂ は変位 ÷ (50 + B) へたり考慮
ヤング率 $E_1 = \text{応力} \div \text{ひずみ}_2$
これが求められているか？

© 2022 Terakoya All Rights Reserved.

9

II 形状依存性

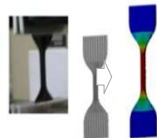
単軸試験の課題② - 形状依存について -

材料力学から

$$\text{ヤング率} E = \text{応力} \sigma / \text{ひずみ} \varepsilon$$

応力とひずみの関係の基本式

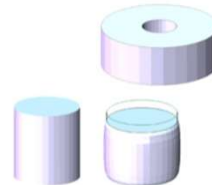
果たしてそうでしょうか？



ダンベル



短冊



ディスク

試験片によって見かけ上（同じ材料でも測定から得られる）ヤング率が異なります。
本当のヤング率が測定できません。短冊がお勧めです。

© 2022 Terakoya All Rights Reserved.

形状率依存性

試験片 ダンベルと短冊での見かけ上ヤング率の違い

それぞれヤング率を算出と・・・

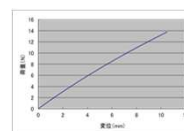
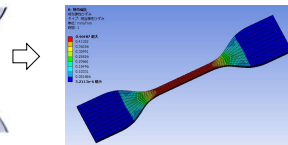
- ・ひずみ ε =変位/チャック間距離
 - ・応力 σ =荷重/断面積
- ⇒ $E = \sigma / \varepsilon$ (理論式) は、試験片に依存します。

真のヤング率 $E=1.0$ で試験、もしくは解析すると

ダンベル



線図からのヤング率 $E=1.27$ となり不一致



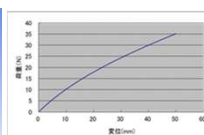
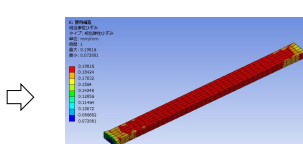
参考：標線間1.05

正しいヤング率は
求められない。

短冊



線図からのヤング率 $E=0.98$ 、ほぼ同等



短冊であれば、
ほぼ正確なヤング率

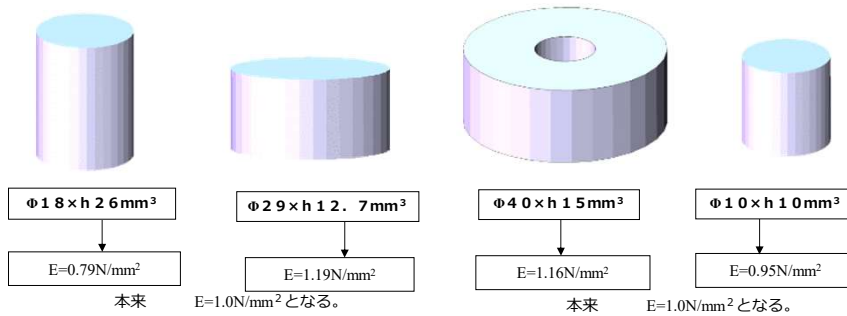
ゴムのJIS等は、解析を目的として書かれていない。
見かけ上のヤング率と真のヤング率を区別する。

11

では圧縮試験でのディスクでは

いろいろなディスクで確認

同様に、ヤング率 $E=1.0$ の材料で解析（測定）したら・・・



材料測定用 T P の違いで見かけ上のヤング率が異なります。
正確なヤング率が求められない。

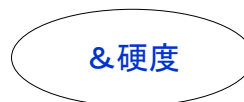
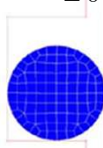
© 2022 Terakoya All Rights Reserved.

12

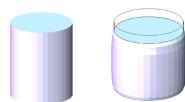
Ⅲ 寸法公差・剛性公差

寸法公差は精度の投球があり 1～3 級があります。

寸法	公差・1 級	2 級	3 級[単位：mm]
3 mm 以下	± 0.2	± 0.3	± 0.4
3～6 mm	± 0.2	± 0.4	± 0.5



剛性と硬度の関係



ディスク変形

ヤング率 E は？

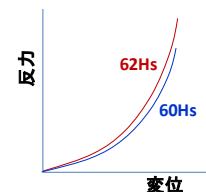
例えば 60Hs

⇒ せん断弾性率 $G = 1.0 \text{ N/mm}^2$

$E = 3G$ から、ヤング率は 3.0 N/mm^2

62Hs のときヤング率は 3.3 N/mm^2

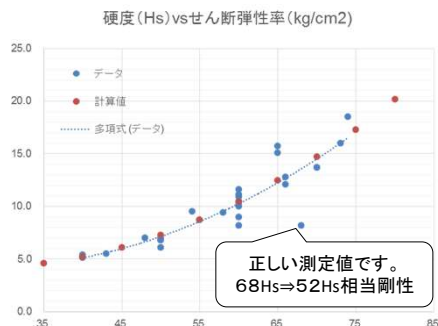
1Hs 5%の差になり、一般的には
 ± 2 or 3Hs ($\pm 10 \sim 15\%$) の幅を持ちます。



ゴムは寸法公差、硬度(中心 $\pm 3\text{Hs}$ など)差が大きい。
解析が合っていないと考えることも多い。⇒ **実際は合っている。**

13

必ずしも硬度と剛性の関係はない



単位がN系に統一されていませんが、
硬度と剛性には、一定の関係があります。

⇒一定の関係、後述します。

ヤング率 $E = 3 \times$ せん断弾性率 G

最も単純な材料表現

Neo-Hookeanモデル

$$W = C_{10}(I_1 - 3)$$

Mooney-Rivlinモデル

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3)$$

一定の経験則 $E = 6(C_{10} + C_{01}) = 3G$

ちなみにエネルギー関数(係数)との関係は

$$E = 6(C_{10} + C_{01}) = (3/2) \sum \alpha_i \mu_i \quad \alpha_i \mu_i > 0$$

14

まとめ

解析予測が実測とあ合わない3つの原因

1. 正確な正しいヤング率定義 (ヤング率/6 = C_{10} ネオフック)

2. 寸法公差

寸法公差は精度の投球があり 1～3 級があります。

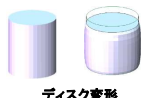
寸法	公差・1級	2級	3級[単位: mm]
3 mm以下	±0.2	±0.3	±0.4
3～6 mm	±0.2	±0.4	±0.5

一般的には2級を採用、Oリングなど直径3mm以下の製品は10%程度差があり、面積では20%、
反力は20%差がみられる。



3. 硬度差

剛性と硬度の関係

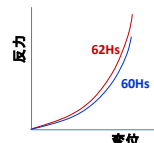


ディスク変形

例えば60Hs 必ずしも60Hsとは限りません。
62Hs のときも「あります」。

1Hs 5%の差になり、一般的には
±2or3Hs(±10～15%)の幅を持ちます。

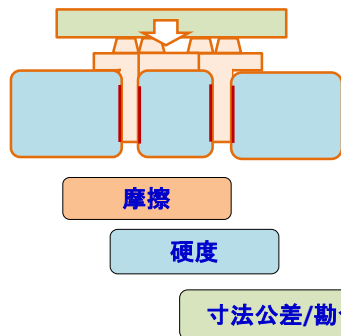
ゴムは寸法公差、硬度(中心±3Hsなど)差が大きい。
解析が合っていないと考えることも多い。⇒**実際は合っている。**



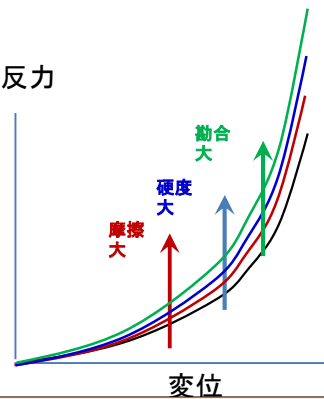
まとめ

複合的要因

圧縮時の荷重



反力

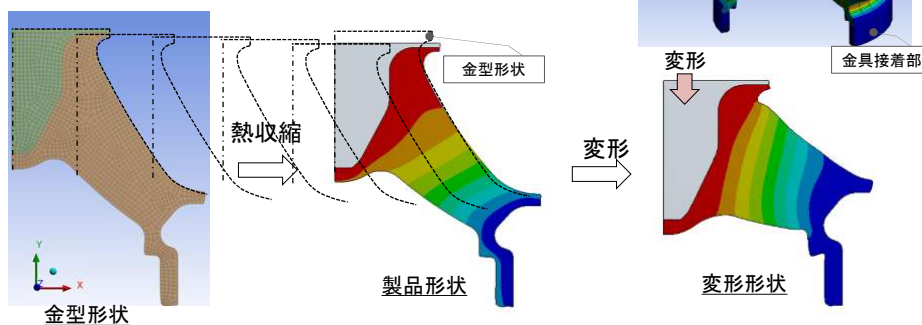


ゴムの様々なばらつきから安定品質の難しさ

16

ゴムの F E M 解析 基本フロー

ゴム単製品は、そのまま変形解析を行えばいいですが、
金具接着タイプは、熱収縮解析が必須だと考えます。



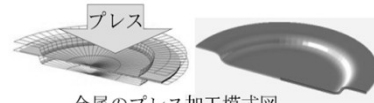
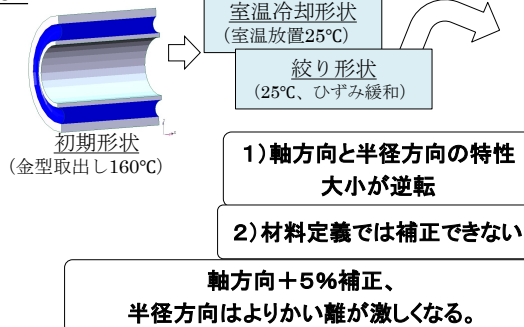
製品の加工工程を考慮することは、ゴム製品のみではなくすべての製品に当てはまります。

金型形状 ⇒ (熱履歴)熱収縮 ⇒ 変形解析 の手順を守ること、
解析による予測精度を格段に向上させることができます。

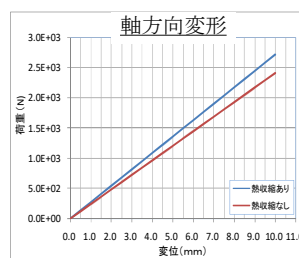
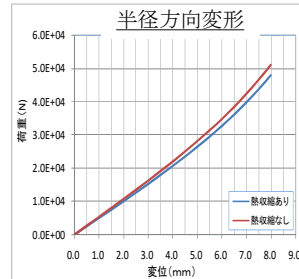
17

ゴム製品の解析では、

BUSH

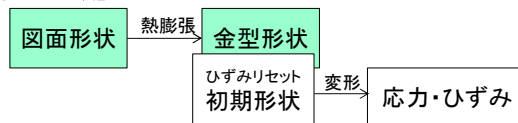


金属のプレス加工模式図



18

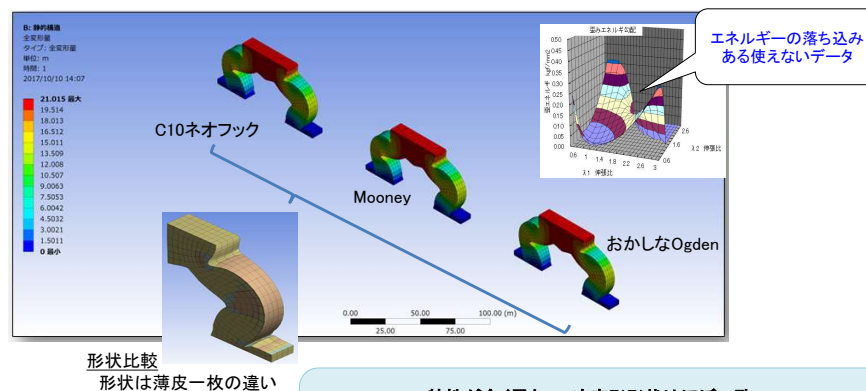
[具体的手順]



金型形状を初期形状として、熱収縮から変形解析への熱-応力連成解析とすることが基本。

精度が格段に向上

非圧縮性ゆえの変形図が同じになる (防舷材)



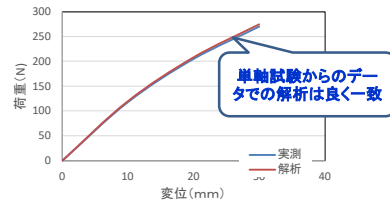
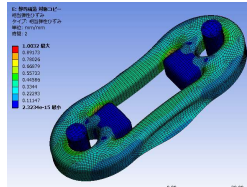
ひどい材料係数を使っても
変位条件での変形は、ほぼ同じ
⇒これが勘違いを生む。

特性が全く異なっても変形状はほぼ一致。
⇒ 形状が一致したから予測が合っているという過ち。
このような形状は、材料が正しい加減でも形状はよく合う。

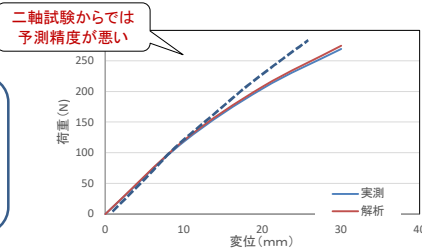
これらのことを理解するのみで精度は格段に向上する。

エネルギー関数導出の落とし穴

マフラーマウントの変形解析



一軸拘束二軸伸張領域のデータで解析



この製品は、一方向に伸張
第二、第三方向は圧縮ひずみ

輪ゴムの変形に近く
単軸試験データが有効

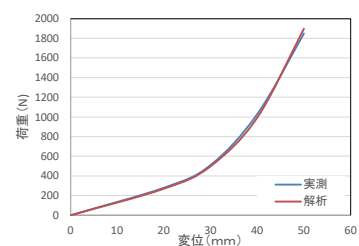
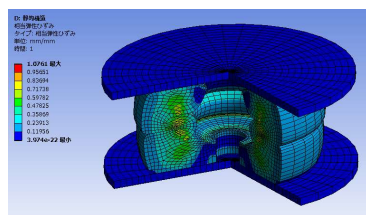
単軸試験からのデータでひずみエネルギー密度関数、適用が良好。

© 2022 Terakoya All Rights Reserved.

20

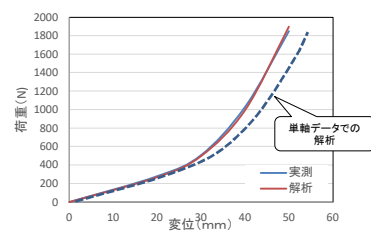
エネルギー関数導出の落とし穴

クッションラバーの変形解析



各部のひずみを確認すると、
単軸よりも二軸、それも純せん断のひずみ
分布に近い

⇒ 二軸試験、純せん断データが有効
(均等二軸伸張ではありません)



© 2022 Terakoya All Rights Reserved.

21

ひずみエネルギー密度関数定義

定義方法

基本式

$$W = W(I_1, I_2, I_3) \quad \text{伸張比 } \lambda = 1 + \varepsilon \quad \text{として表現}$$

テンソルとして、

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2$$

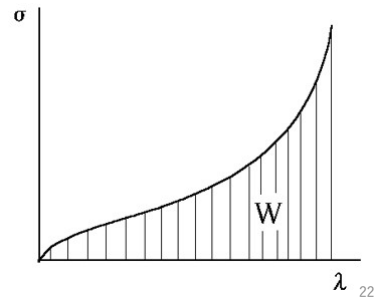
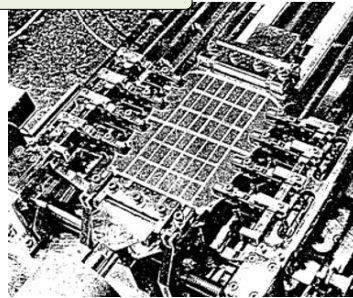
$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1$$

[対角線効果]

[面積効果]

[体積効果]

基本は単軸と同じ、へたり補正



22

ひずみエネルギー密度関数定義

ひずみエネルギー密度関数 様々な表現式

1) Neo-Hookeanモデル

$$W = C_{10}(I_1 - 3)$$

2) Mooney-Rivlin

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3)$$

3) Mooney高次式

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3$$

4) Ogden

$$W = \sum \frac{\mu_i}{\alpha_i} \lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3$$

5) Arruda-Boyce

$$W = nk\theta \left[\frac{1}{2}(I_1 - 3) + \frac{1}{20N} \left(\frac{I_1^2}{1} - 9 \right) + \frac{11}{1050N^2} \left(\frac{I_1^3}{1} - 27 \right) + \frac{19}{7000N^3} \left(\frac{I_1^4}{1} - 81 \right) + \frac{519}{673750N^4} \left(\frac{I_1^5}{1} - 243 \right) \right]$$

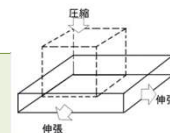
$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad \text{[対角線効果]}$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \quad \text{[面積効果]}$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1 \quad \text{[体積効果]}$$

※ $I_3=1$ は非圧縮性

最近、紛らわしい論文(圧縮性を示す誤り)



一般的にこれら定義で
解析予測精度が良いと言われる。

23

へたり考慮で十分予測精度アップ

ひずみエネルギー密度関数定義

ひずみエネルギー密度関数の表現式

$$W = W(I_1, I_2, I_3)$$

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

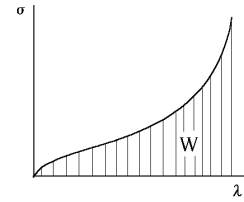
$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1$$

[対角線効果]

[面積効果]

[体積効果]



1) Neo-Hookeanモデル

$$W = C_{10}(I_1 - 3) \quad \dots \quad \text{最も単純な材料表現}$$

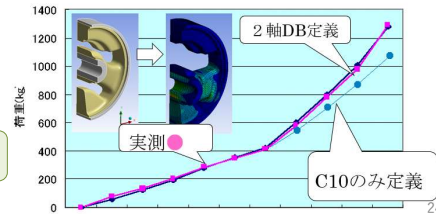
$$C_{10} = E/6$$

の関係

エネルギー関数定義すると
非常に精度上がりますが、
基本のヤング率=6C₁₀でも
ある程度の精度アップします。

根本的な問題は、

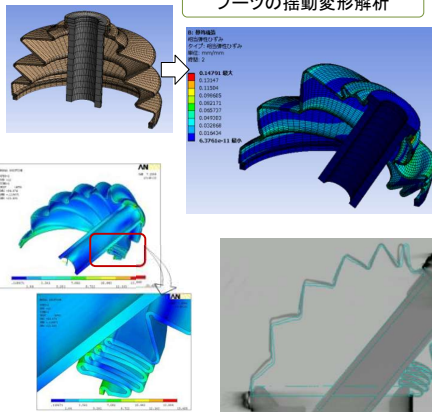
△の字型マウントの特性予測解析



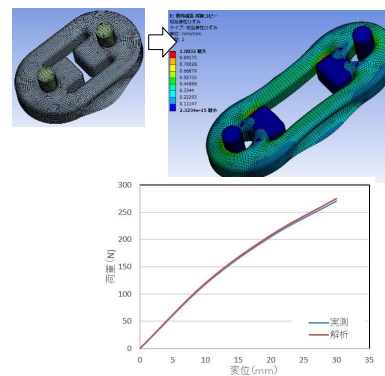
ひずみエネルギー密度関数定義

解析例 - 定義及び解析の注意点を守れば簡単に精度がアップする

ブーツの揺動変形解析



マフラーマウントの変形解析

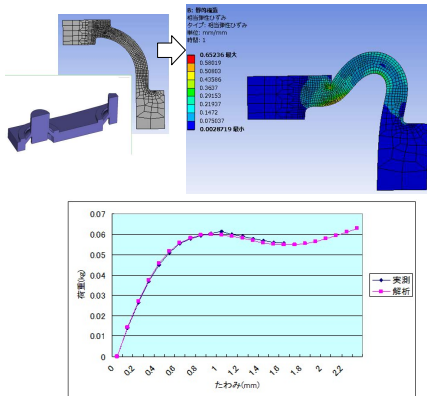


実測と解析予測が良く一致(良好)

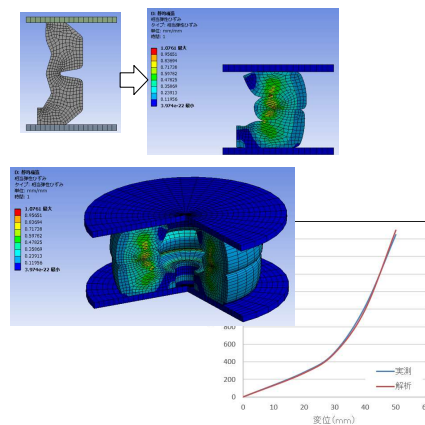
25

解析例 定義及び解析の注意点を守れば簡単に精度がアップする

ラバーコンタクト変形解析



ラバースプリングの変形解析

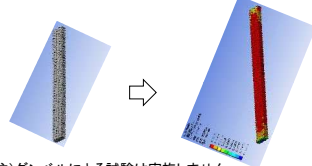


実測と解析予測が良く一致 (良好)

26

新規縦型の簡易二軸試験機が有効な理由

①短冊による単軸伸張試験

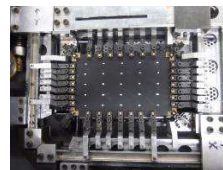


注) ダンベルによる試験は実施しません。短冊が最適です。

②一軸拘束二軸伸張試験



注) 製品予測のため、この変形を推奨しています。

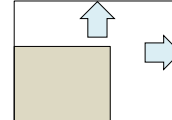


二軸試験概要

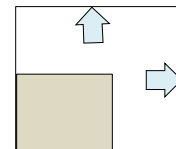
一軸拘束二軸試験



二軸試験



均等二軸試験



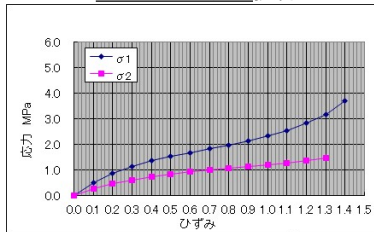
よく聞かれる話ですが、単軸、一軸拘束二軸伸張(純せん断)、均等二軸のすべてのデータを使うと精度が上がります。
嘘ではありませんが、かなり課題が大きいです。

27

ひずみエネルギー密度関数の回帰方法

Moonetを例に、荷重、変位から変換

測定した荷重vs変位
⇒ 応力vs ひずみ換算



※共に有効断面がポイントで、
どちらも同じ結果

$$\sigma_1 = \frac{2}{\lambda_1} \left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_2^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right)$$

$$\sigma_2 = \frac{2}{\lambda_2} \left(\lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_1^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right)$$

$$\sigma_3 = 0$$



$$\frac{\partial W(I_1, I_2)}{\partial I_1} = \frac{1}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left[\frac{\lambda_1^3 \sigma_1}{\lambda_1^2 - (\lambda_1 \lambda_2)^{-2}} - \frac{\lambda_2^3 \sigma_2}{\lambda_2^2 - (\lambda_1 \lambda_2)^{-2}} \right]$$

$$\frac{\partial W(I_1, I_2)}{\partial I_2} = \frac{1}{2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left[\frac{\lambda_1 \sigma_1}{\lambda_1^2 - (\lambda_1 \lambda_2)^{-2}} - \frac{\lambda_2 \sigma_2}{\lambda_2^2 - (\lambda_1 \lambda_2)^{-2}} \right]$$

28

ひずみエネルギー密度関数の回帰方法

Mooney高次モデルの定義

$$W = C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3) + C_{11} (I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{20} (I_1 - 3)^2 + C_{30} (I_1 - 3)^3$$

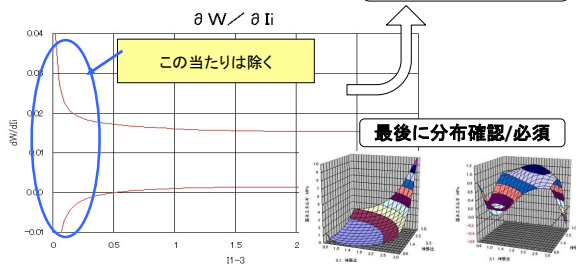
$$\frac{\partial W(I_1, I_2)}{\partial I_1} = \frac{1}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left[\frac{\lambda_1^3 \sigma_1}{\lambda_1^2 - (\lambda_1 \lambda_2)^{-2}} - \frac{\lambda_2^3 \sigma_2}{\lambda_2^2 - (\lambda_1 \lambda_2)^{-2}} \right] \Rightarrow = C_{10} + C_{11} (I_2 - 3) + 2C_{20} (I_1 - 3) + 3C_{30} (I_1 - 3)^2$$

$$\frac{\partial W(I_1, I_2)}{\partial I_2} = \frac{1}{2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left[\frac{\lambda_1 \sigma_1}{\lambda_1^2 - (\lambda_1 \lambda_2)^{-2}} - \frac{\lambda_2 \sigma_2}{\lambda_2^2 - (\lambda_1 \lambda_2)^{-2}} \right] \Rightarrow = C_{01} + C_{11} (I_1 - 3)$$

EXCELの回帰機能で
係数をもとめられる。

実測からプロット
(赤線)

二軸試験機の実習から回帰のご指導
承ります。



最後に分布確認/必須

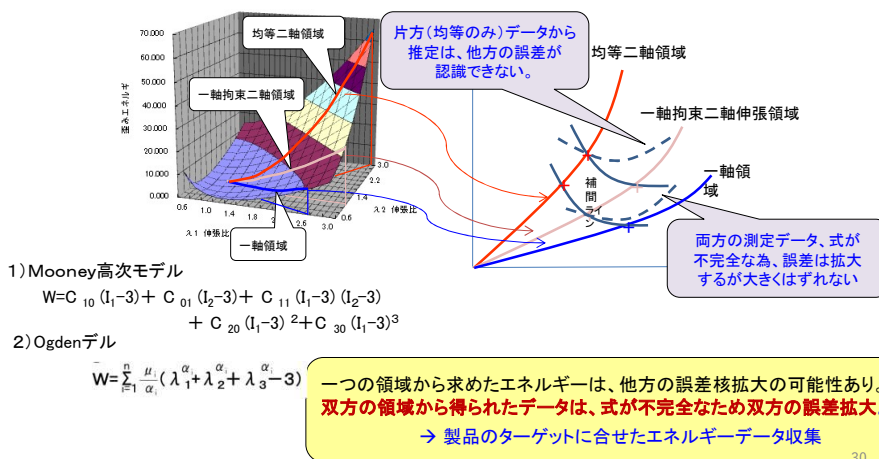
全ての係数を特定するには2方向のデータ(伸張側と拘束側)が必須ですが、ソフトの回帰機能は
(伸張側の)1方向データで回帰可能、何らかの前提を取り入れるか? 優秀な機能かもしれません。

29

エネルギー関数導出の落とし穴

新規縦型の簡易二軸試験機が有効な理由

良く、単軸、一軸拘束二軸伸張（純せん断）、均等二軸すべてのデータを入力すると精度が上がるといいますが、間違いではありませんがこれらの式ですべての面をすべて精度よく表現できるでしょうか。難しいです、1つの領域でも表現できないのに・・・。



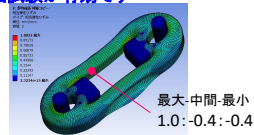
エネルギー関数導出の落とし穴

二軸均等伸張データで予測できるのは、風船のような製品

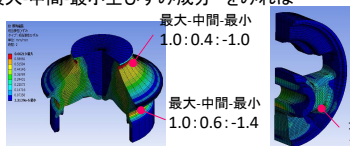


2方向に均等に伸張する製品は
 ゴム製品でも少ない
 ⇒ 均等二軸伸張の領域データは不要

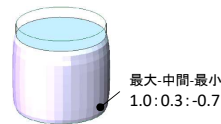
単軸試験が有効です



二軸試験で一軸拘束二軸伸張試験が有効な理由
 最大・中間・最小主ひずみ成分をみれば



最大・中間・最小
 1.0:0.5:-0.9

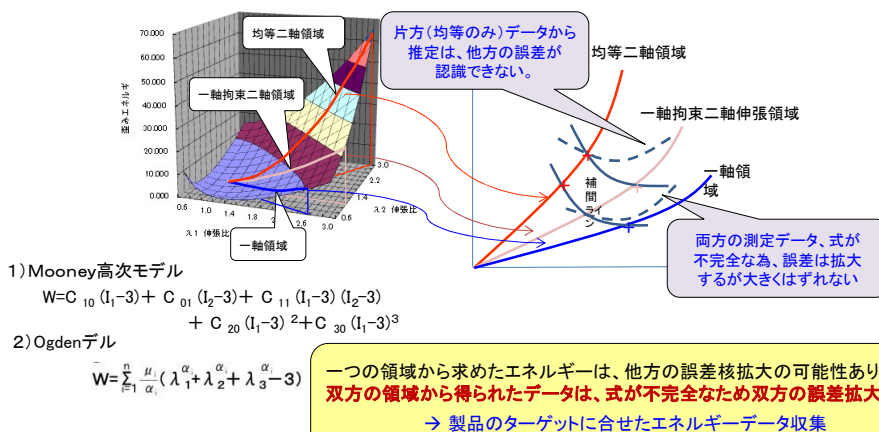


いずれもひずみを確認すればわかるように
 均等二軸とよりも純せん断（一軸拘束二軸伸張）、単軸試験が有効です。

エネルギー関数導出の落とし穴

新規縦型の簡易二軸試験機が有効な理由

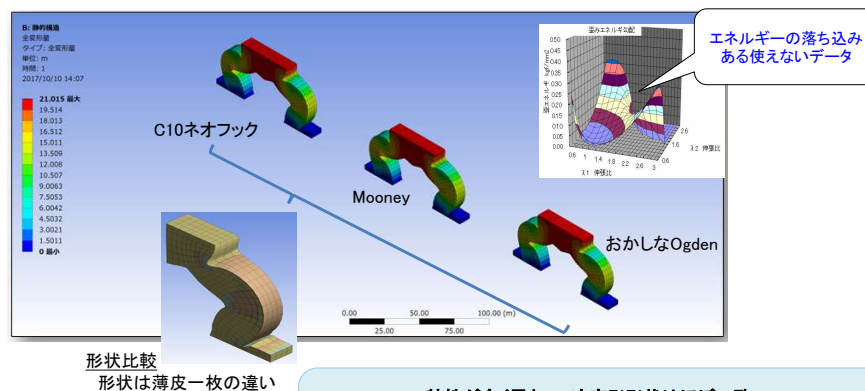
良く、単軸、一軸拘束二軸伸張（純せん断）、均等二軸すべてのデータを入力すると精度が上がるといいますが、間違いではありませんがこれらの式ですべての面をすべて精度よく表現できるでしょうか。難しいです、1つの領域でも表現できないのに・・・。



© 2022 Terakoya All Rights Reserved.

32

非圧縮性ゆえの変形図が同じになる（防舷材）



ひどい材料係数を使っても
 変位条件での変形は、ほぼ同じ
 ⇒ これが勘違いを生む。

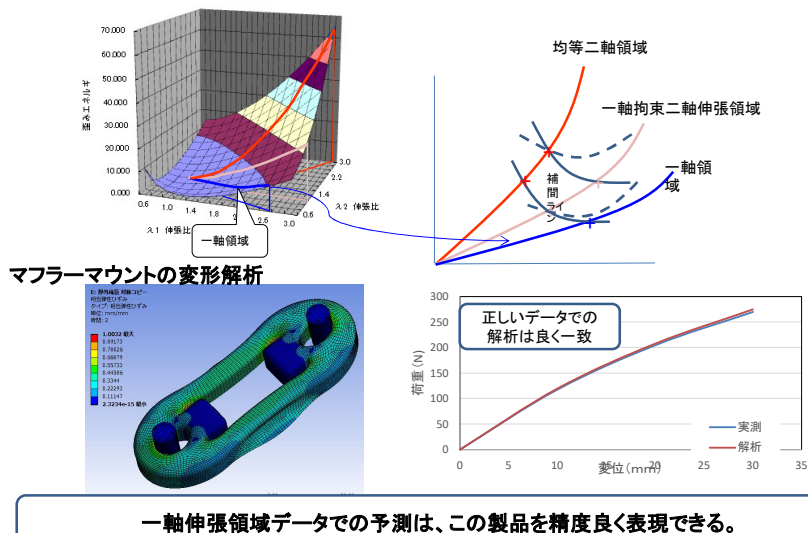
特性が全く異なっても変形形状はほぼ一致。
 ⇒ 形状が一致したから予測が合っているという過ち。
 このような形状は、材料が正しい加減でも形状はよく合う。

これらのことを理解するのみで精度は格段に向上する。

© 2022 Terakoya All Rights Reserved.

33

エネルギー関数導出の落とし穴

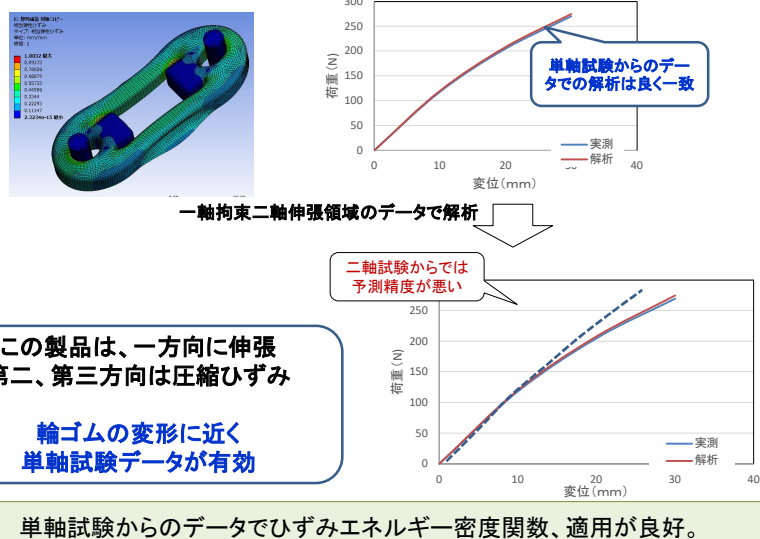


© 2022 Terakoya All Rights Reserved.

34

エネルギー関数導出の落とし穴

マフラーマウントの変形解析

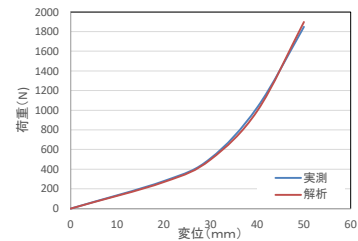
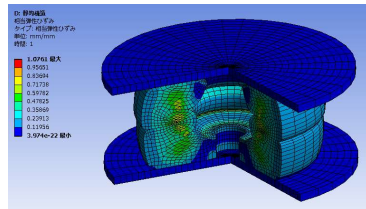


© 2022 Terakoya All Rights Reserved.

35

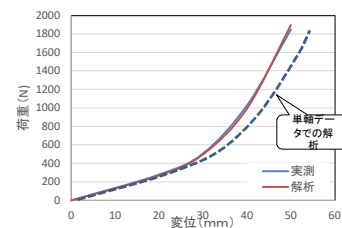
エネルギー関数導出の落とし穴

クッションラバーの変形解析



各部のひずみを確認すると、
単軸よりも二軸、それも純せん断のひずみ
分布に近い

⇒ 二軸試験、純せん断データが有効
(均等二軸伸張ではありません)

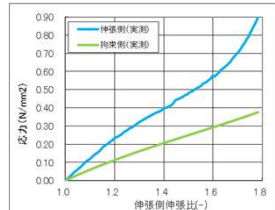


© 2022 Terakoya All Rights Reserved.

36

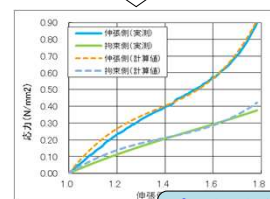
エネルギー関数導出の落とし穴

【一軸拘束二軸伸張試験の実測】



単位: N/mm²				
C ₁₀	C ₂₀	C ₁₁	C ₂₁	C ₂₂
1.8189E-01	2.6448E-02	-1.0841E-02	-4.8180E-02	3.4297E-02

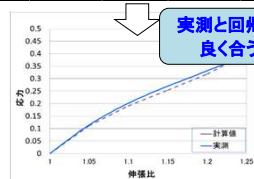
回帰精度確認



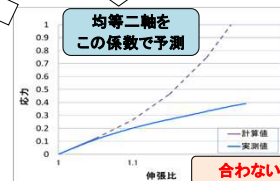
実測と回帰が
良く合う

均等二軸伸張試験からの回帰係数

単位: N/mm²				
C ₁₀	C ₂₀	C ₁₁	C ₂₀	C ₂₂
3.0360E-01	-8.5264E-02	1.3040E-01	-3.0036E-01	3.4188E-01



実測と回帰が
良く合う



均等二軸を
この係数で予測

合わない

一軸拘束二軸、均等二軸 共通で精度よく回帰することは難しい。

37

ゴムの二軸伸張からひずみエネルギー密度関数定義

1991年から同志社大学で坂口教授のもとで研究スタート、今も勉強中

ゴムの二軸伸張試験、承ります。-ゴムの専門家として解析適用までサポートします。-

二軸伸張試験実施 ⇒ひずみエネルギー密度関数(Mooney, Ogden等回帰、係数算出。25万円～複数割あり

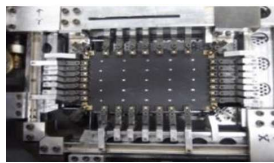
$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{20}(I_2 - 3)^2 + C_{30}(I_2 - 3)^3$$

Ogden定義も可能です。

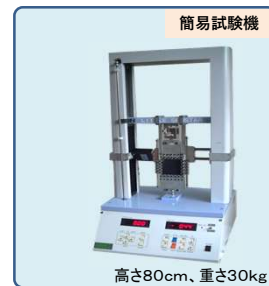


現地（富山）の二軸試験機

- ・エネルギー関数の真実、注意すべき点
- ・ゴムの解析への適用方法
- ・線形解析での間違いやすい点、その他サポート



サンプル取り付け部



高さ80cm、重さ30kg

従来の試験機は、横置き型・大型 非常に高価 旧型、富山工業試験場、昭和生まれですがまだまだ現役です。

1日で修得も可能です。二軸伸張試験からエネルギー密度関数回帰/富山or東京近郊

38

お問い合わせリンク

<https://terakoya2018.com/question>

公共試験場を利用して ゴムの解析用ひずみエネルギーを構築しませんか。

- 候補日をいただければ調整します。1社4名様くらいまで -

1. 富山県でご希望の日程で、6時間程度で修得できます。操作は簡単で、ひな型を使って回帰も簡単です。

※ひな型販売もしています。

2. 公共試験場ですので、安価に、（修得すれば）いつでもご利用いただけます。

アフターフォローも万全です、問い合わせに回答します。

連絡先 hagi@terakoya2018.com
080-2230-8785

寺子屋/CAE解援隊

URL <https://terakoya2018.com>



富山県産業技術研究開発センター (pref.toyama.jp)