ひずみエネルギー密度関数導出に伴う
ゴムの二軸伸張試験機の測定時の四隅の荷重の扱い

2023.12.10　寺子屋　萩本

寺子屋/CAE解援隊
連絡先　hagi@terakoya2018.com

ゴム材料の基本知識　ひずみエネルギー密度関数

基本式

$$W = W(I_1, I_2, I_3)$$

伸張比 $\lambda = 1 + \varepsilon$　として表現

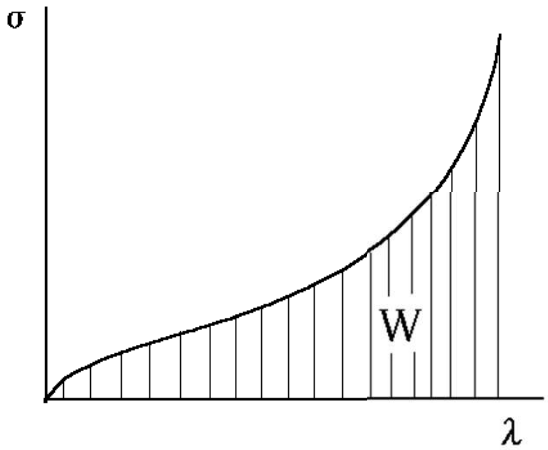
テンソルとして、

$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$　［対角線効果］

$I_2 = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2$　［面積効果］

$I_3 = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 = 1$　［体積効果］

基本は単軸と同じ、へたり補正



© 2022 Terakoya All Rights Reserved

ゴム材料の基本知識　ひずみエネルギー密度関数

ひずみエネルギー密度関数　様々な表現式

1）Neo-Hookeanモデル

$$W=C_{10}(I_1-3)$$

2）Mooney−Rivlin

$$W=C_{10}(I_1-3)+C_{01}(I_2-3)$$

$I_1=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2$　［対角線効果］

$I_2=\lambda_1^2\lambda_2^2+\lambda_2^2\lambda_3^2+\lambda_3^2\lambda_1^2$　［面積効果］

$I_3=\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2=1$　［体積効果］

3）Mooney高次式

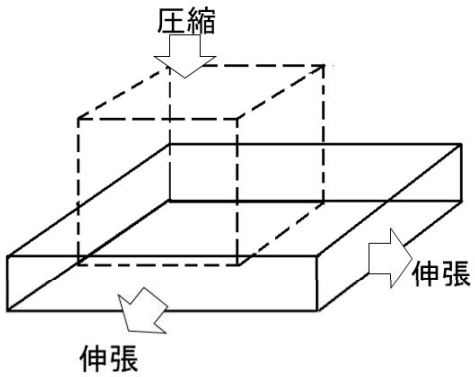
$$W=C_{10}(I_1-3)+C_{01}(I_2-3)+C_{11}(I_1-3)(I_2-3)+C_{20}(I_1-3)^2+C_{30}(I_1-3)^3$$

4）Ogden

$$W=\Sigma\frac{\mu_i}{\alpha_i}(\lambda_1^{\alpha_i}+\lambda_2^{\alpha_i}+\lambda_3^{\alpha_i}-3)$$

5）Arruda-Boyce

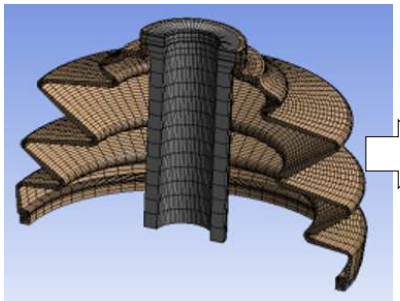
$$W=nk\theta\left[\frac{1}{2}(I_1-3)+\frac{1}{20N}\left(I_1^2-9\right)+\frac{11}{1050N^2}\left(I_1^3-27\right)+\frac{19}{7000N^3}\left(I_1^4-81\right)+\frac{519}{673750N^4}\left(I_1^5-243\right)\right]$$

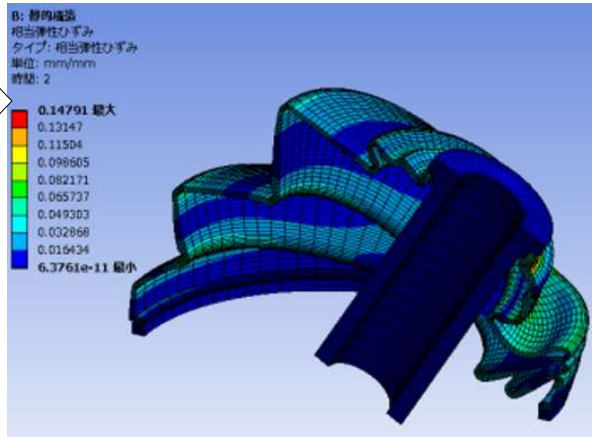


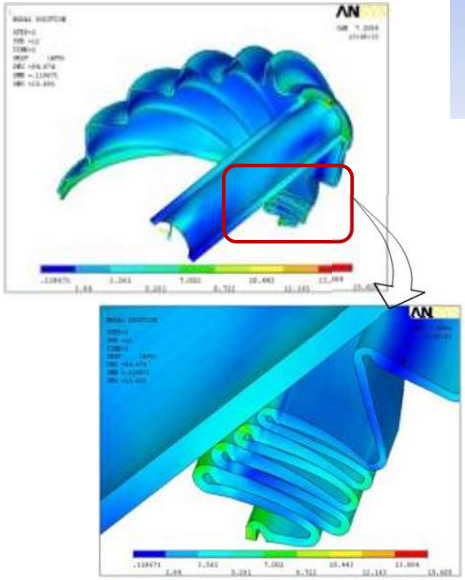
適切に定義すると、1）2）の式でもある程度、3）4）5）の高次の式は
次ページに示すように解析予測精度が良いと言われる。

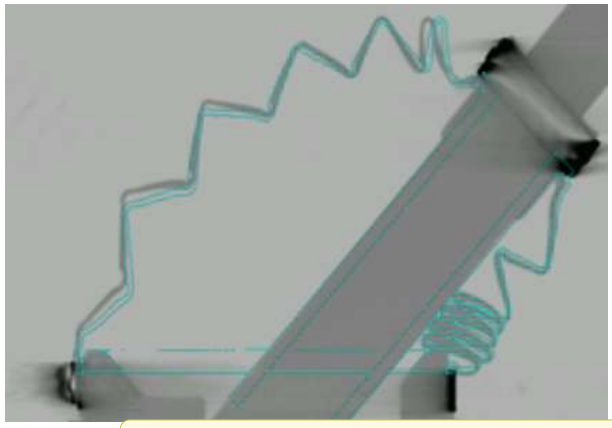
解析例）定義及び解析の注意点を守れば簡単に精度がアップする

ブーツの揺動変形解析

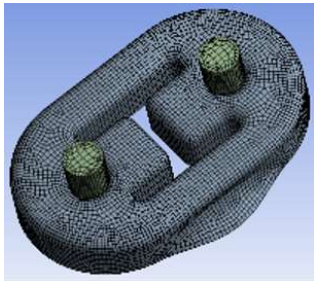


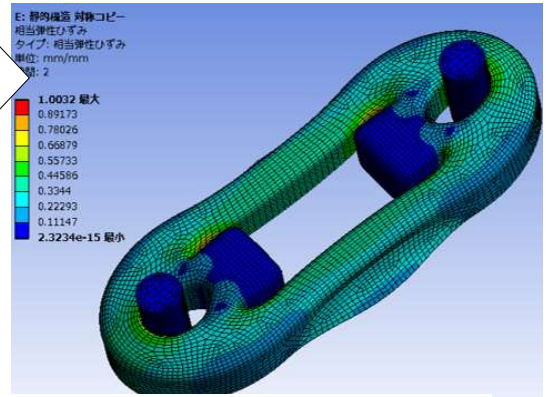


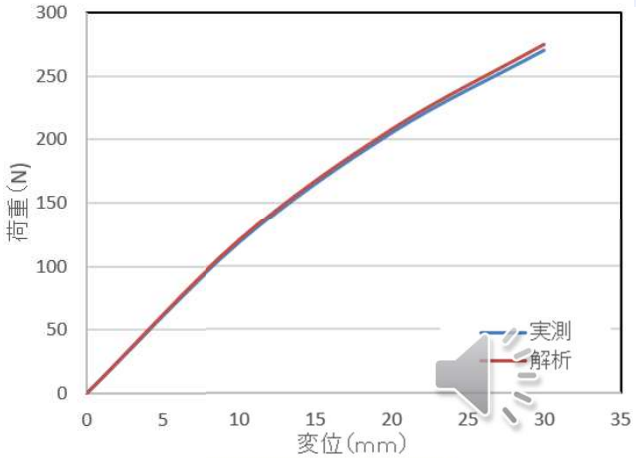




マフラーマウントの変形解析





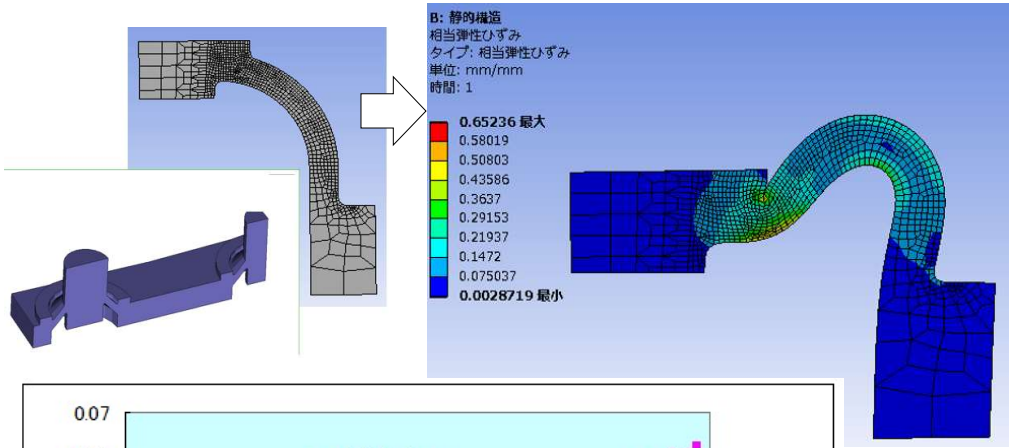


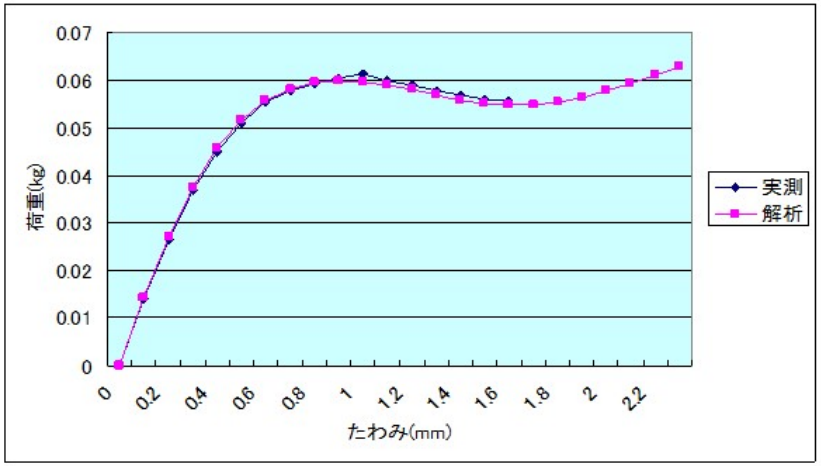
実測と解析予測が良く一致（良好）

© 2022 Terakoya All Rights Reserved.

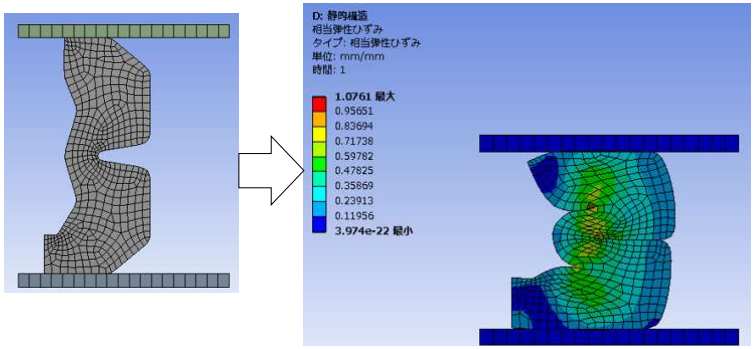
解析例）定義及び解析の注意点を守れば簡単に精度がアップする

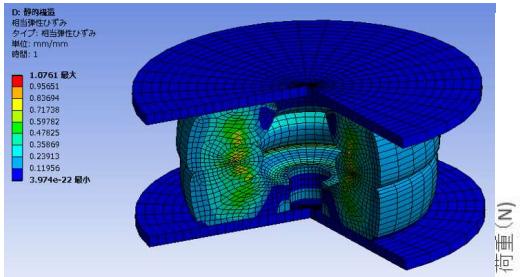
ラバーコンタクト変形解析

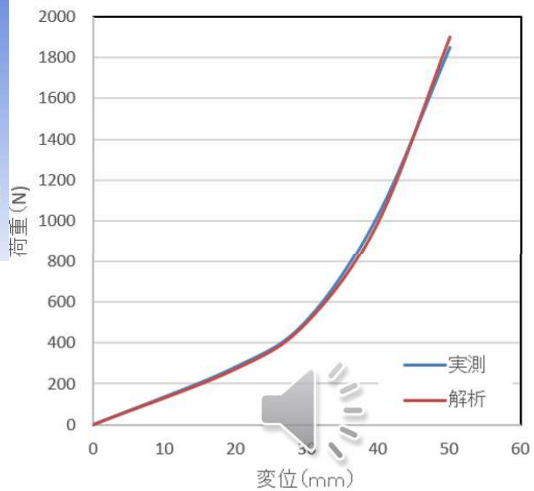




ラバースプリングの変形解析





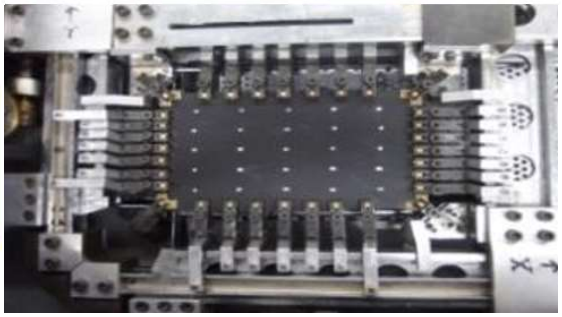


実測と解析予測が良く一致（良好）

© 2022 Terakoya All Rights Reserved.

従来の二軸試験機について

Mooney式： $W=C_{10}(I_1-3)+C_{01}(I_2-3)+C_{11}(I_1-3)(I_2-3)+C_{20}(I_1-3)^2+C_{30}(I_1-3)^3$

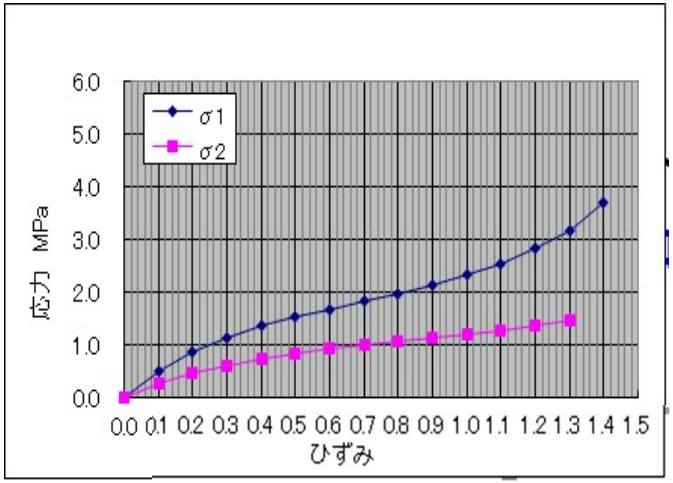


サンプル取り付け部

一軸拘束二軸伸張（純せん断）試験

伸張側と拘束側の荷重を測定することでネルギー関数として表現可能です。

伸張側、拘束側のひずみvs応力

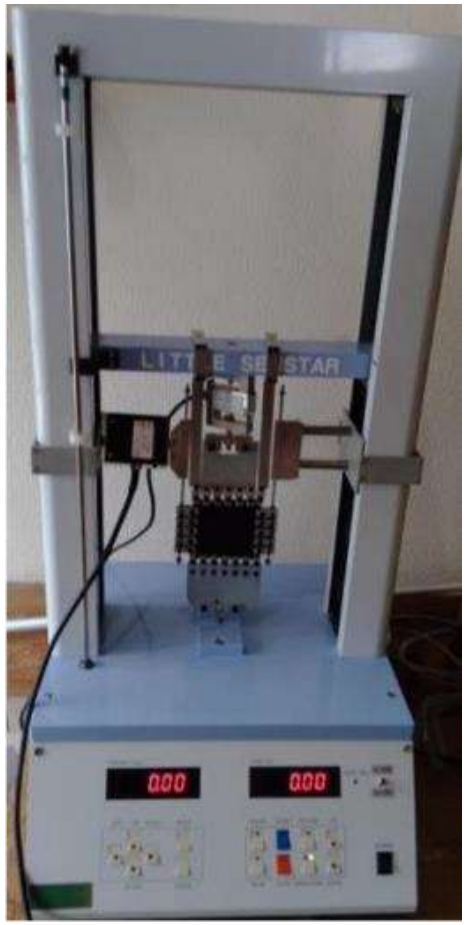


従来の試験機は、横置き型・大型　非常に高価なため、小型、必要十分な
一軸拘束二軸伸張（純せん断）の領域を測定可能な簡易試験機を提案します。

© 2022 Terakoya All Rights Reserved.

安価で構築可能な効率的試験機

新規縦型の簡易二軸試験機　一軸拘束二軸伸張（純せん断）専用



解析精度向上に、この簡易二軸試験機の一軸拘束の領域で十分と考えます。（根拠あり）

サンプルサイズもコンパクト　□75mm（厚み0．7～2．3mm）／コンパクト
＊富山　□120mm必要

- 一軸拘束二軸伸張専用
- 富山試験場もご紹介（前ページ試験機）
- 群馬館林近郊でも使用
- 福山通運便でもお届け／レンタル

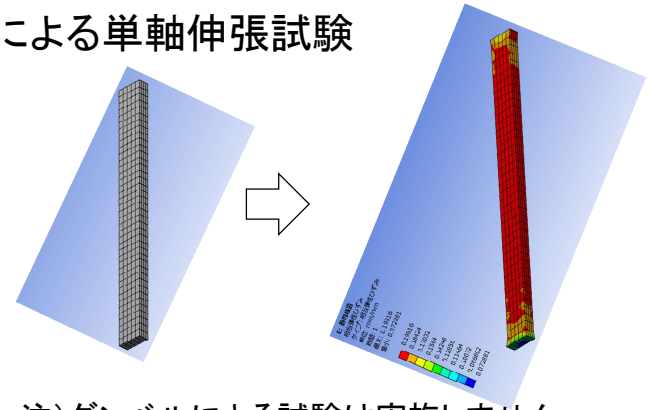
自宅の一室で使用
半日開放、方法、回帰方法
ご指導します。

従来型に比べて、安価な製作費でできます。（4分の1程度製作費）
一軸拘束二軸伸張試験専用（変形状態3ページ）です。
製品の解析には、最も適した変形状態から解析データを構築します。

© 2022 Terakoya All Rights Reserved.

新規縦型の簡易二軸試験機が有効な理由

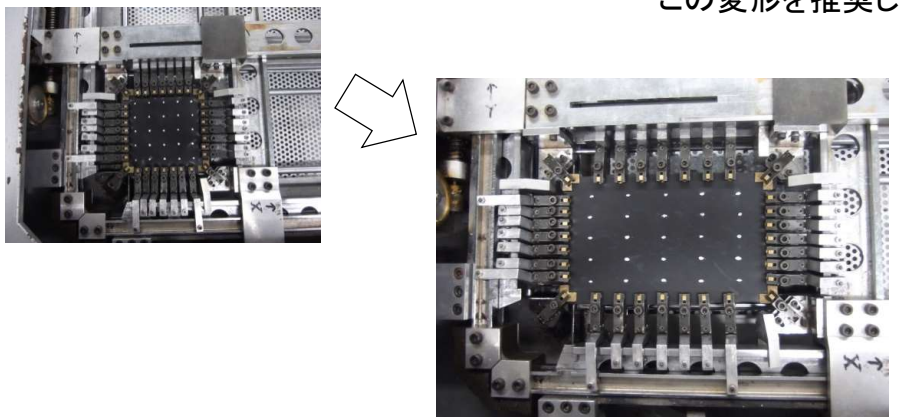
①短冊による単軸伸張試験



注）ダンベルによる試験は実施しません。
短冊が最適です。

②一軸拘束二軸伸張試験

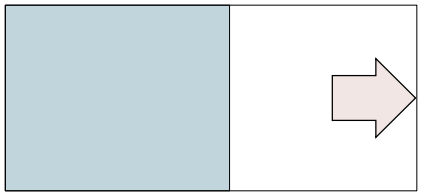
注）製品予測のため、
この変形を推奨しています。



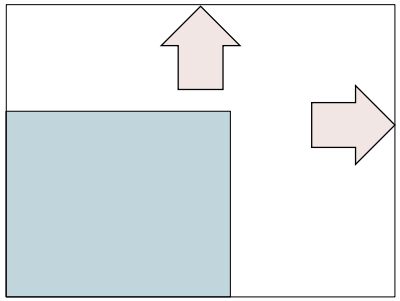
二軸試験概要

二軸試験には様々な変形形態があります。

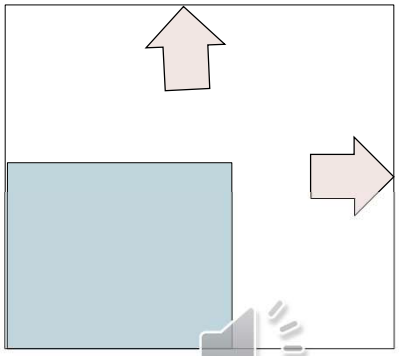
一軸拘束二軸試験



二軸試験



均等二軸試験



よく聞かれる話ですが、単軸、一軸拘束二軸伸張（純せん断）、均等二軸のすべてのデータを使うと精度が上がります（詳細HP）。
嘘ではありませんが、かなり課題が大きく、一軸拘束二軸伸張の領域で90％以上の製品は精度向上します。

過去の工夫状況

参考文献

Sueo Kawabata and Hiromichi Kawai
Department of Polymer Chemistry, Kyoto University, Kyoto 606, Japan

単軸での一軸拘束二軸伸張試験

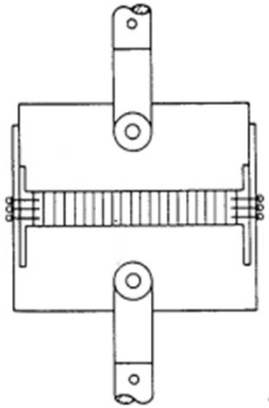


Fig. 6. Blatz-Ko's apparatus for strip biaxial extension. Specimen is rectangular in shape, 7 in × 1 in and 0.0187 in thick

単軸での二軸伸張試験

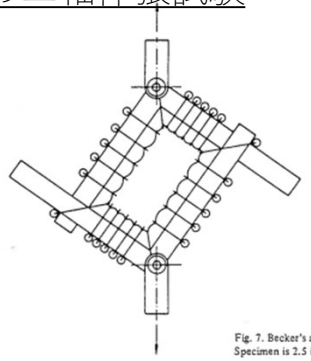


Fig. 7. Becker's apparatus for biaxial extension. Specimen is 2.5 in × 2.5 in and 1 mm thick

単軸での二軸伸張試験

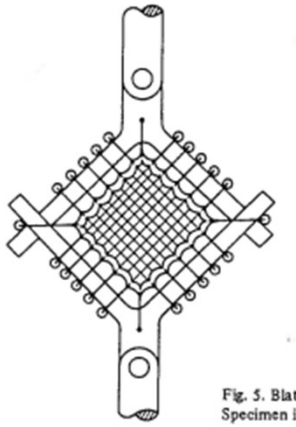


Fig. 5. Blatz-Ko's apparatus for equal biaxial extension. Specimen in undeformed state is 3 in × 3 in and 0.0187, in thick

従来の二軸試験による伸張

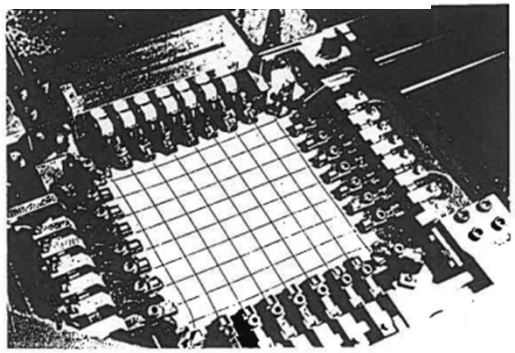


Fig. 8B. View of the apparatus in Fig. 8A

二軸試験機原理

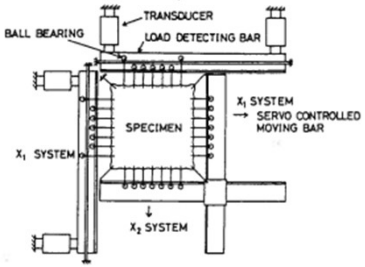


Fig. 8A. Our apparatus for biaxial extension. Specimen is 11.5 cm × 11.5 cm and 1 mm thick

単軸試験機を治具による工夫
二軸データを得ることが可能。

© 2022 Terakoya All Rights Reserved.

先人の知恵により四隅の荷重は除くこと、周知の事

従来の二軸試験による伸張

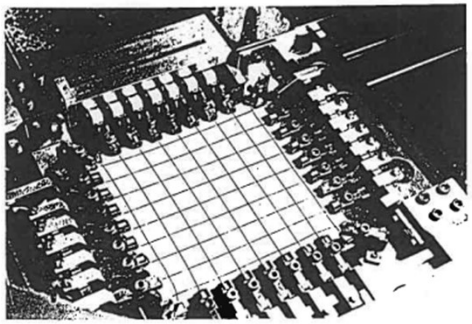
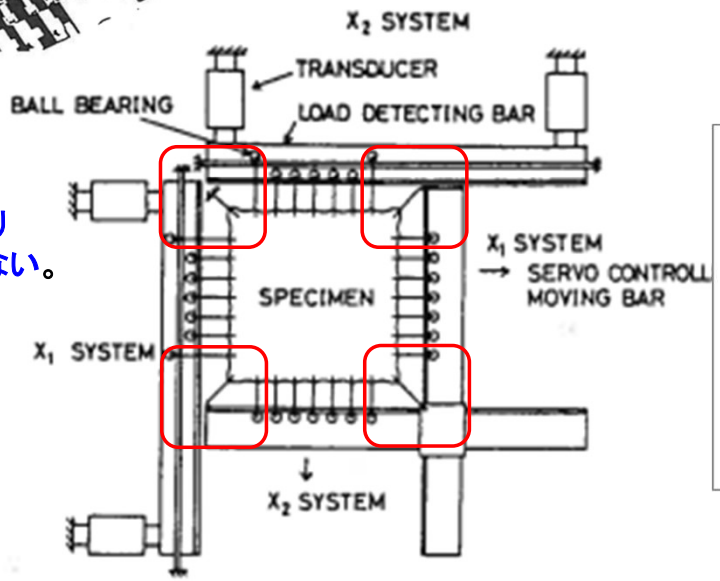


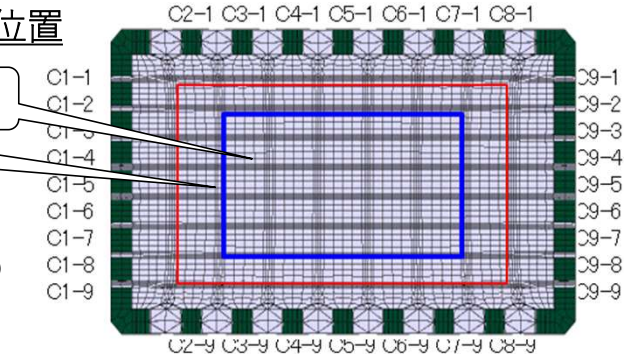
Fig. 8B. View of the apparatus in Fig. 8A

二軸試験機原理



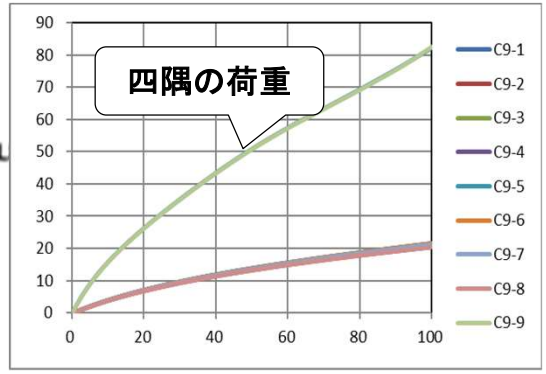
この部位（4か所）
試験機の工夫により
四隅の荷重を採らない。

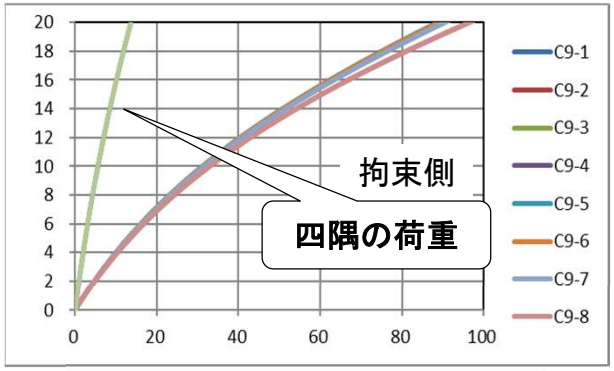
シート伸張とチャック位置



この範囲の荷重も
均一だが、念のため
チャック1つ分外す。

それぞれチャック（C1-1～C9-9）までの荷重をグラフ化する。





四隅の荷重は、他のチャック荷重と大きく違う。 平均すると・・・

四隅のチャックの荷重はほかのチャック部よりはスカに大きいため、一緒に平均するとおかしなことに。

京都大・川端先生の文献でもこの範囲を採荷しない工夫がされている。

提言

1）簡易試験機と従来の試験機は同等の機能で、簡易試験機は安価に構築可能。

2)四隅の荷重は採らない。（基本）

3）有効断面を考慮して回帰を実施。

寺子屋にてサービス提供

・技術資料　・試験機情報　・材料構築サポート

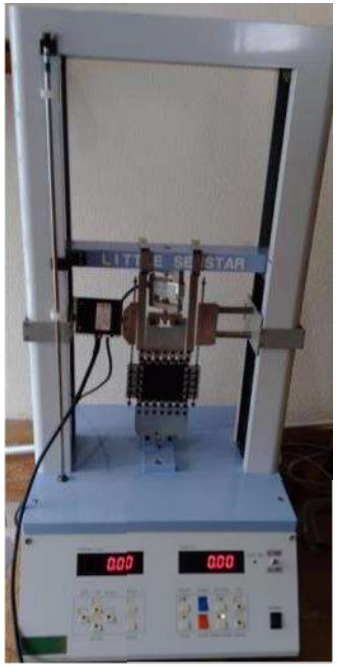
（シートがご用意できない方、製品から定義可能です。）

寺子屋

https://terakoya2018.com/

TEL：080-2230-8785

MAIL：hagi@terakoya2018.com



簡易二軸試験機

購入

レンタル可

© 2022 Terakoya All Rights Reserved.

ひずみエネルギー密度関数のヒント　-二軸試験ができない場合-

どうしても二軸試験ができない、□75mmサンプルが入手できない場合

手掛かりのない方へのお試し用サンプルの提供

Mooney式：　$W=C_{10}(I_1-3)+C_{01}(I_2-3)+C_{01}(I_1-3)(-I_2-3)+C_{20}(I_1-3)^2+C_{30}(I_1-3)^3$

Ogden式：　$W=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i}{\alpha_i}(\lambda_1^{\alpha_i}+\lambda_2^{\alpha_i}+\lambda_3^{\alpha_i}-3)$

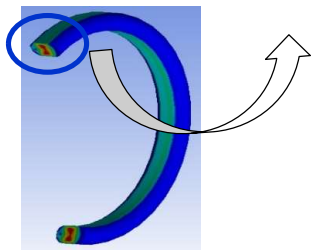
N/mm2

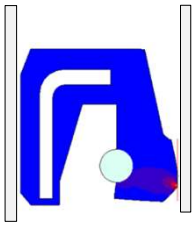
せん断弾性率	C10	C01	C11	C20	C30
9.500	4.27702E+00	6.56858E-01	-1.39251E-01	-2.14736E-02	1.15420E+00

①天然ゴム（NR）[35－80Hs]　②スチレンゴム（SBR）[35－80Hs]
③ニトリルゴム（NBR）[35－80Hs]　④クロロプレンゴム（CR）[48－75Hs]
⑤エチレン・プロピレンゴム[50－80Hs]　⑥フッ素ゴム[55－80Hs]　他
⑦シリコン[35－60Hs]

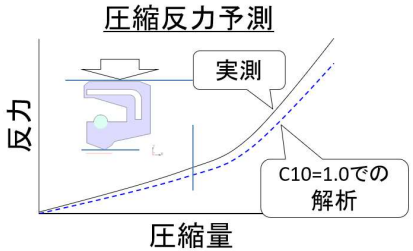
他の硬度もご相談ください。

製品しかない場合





製品試験と解析から



解析と実測との比

⇒　C_{10}=1.0×係数 補正

C_{10}+C_{01}一致するものを選定
⇒　調整　⇒　解析適用

© 2022 Terakoya All Rights Reserved.

材料定義をご自身で修得すれば後は試験場使用料のみ

お問い合わせリンク
https://terakoya2018.com/question

公共試験場を利用して
ゴムの解析用ひずみエネルギーを構築しませんか。

－ 候補日をいただければ調整します。1社4名様くらいまで －

1. 富山県でご希望の日程で、6時間程度で修得できます。
   操作は簡単で、ひな型を使って回帰も簡単です。
   ※ひな型販売もしています。
2. 公共試験場ですので、安価に、(修得すれば)いつでも
   ご利用いただけます。

アフターフォローも万全です、問い合わせに回答します。

富山県産業技術研究開発センター（pref.toyama.jp）

**現在、現役の試験機ですが何分、昭和生まれですので・・
使えるうちに覚えましょう。**

寺子屋/CAE解援隊
URL https://terakoya2018.com
連絡先 hagi@terakoya2018.com
080-2230-8785

- プログラム（案） -

1.　ゴムの測定からデータのまとめ方、注意点（最重要）と概要　10:00～10:20

1-1. 短冊、ダンベルでの単軸伸張試験の注意点

実習で行う単軸試験でのセット時のへたり補正方法について説明し、単軸試験でのゴムの挙動を確認します。

1-2. 見かけ上のヤング率について

サンプルの選定、測定方法で本当の剛性が求められないことがあります。

速度依存性を気にする方もいますが、そこはほとんど影響ありません。明確に説明します。

※お問い合わせいただければ資料で説明します。

※ゴム製造メーカーへの上手な問い合わせ方法を提案します。

1-3. 二軸理論と実習前の試験機の操作概要と注意点

ネオフックからムーニー高次関数、またオグデンでの定式化を説明します。

1-4. 試験時にやってはいけない注意点のみ説明します。

2. 単軸試験実習 及び二軸試験実習　10:25～14:50

昼食休憩　（12:00～13:00）

1時間1材料、（基本1材料）
夕方まで最大8材料可

13時間ころ終了

4. 単軸及び二軸試験のまとめ　15:00～16:00

EXCELひな形を使って、回帰からエネルギー関数を定義します。

その際に、二軸試験機の制約から正確なヤング率が取れていないので、補正を行います。

費用：1名20万円、1名追加＋5万円/税別　作業道具は全てご用意します。