

ゴムの FEM 解析

- 初心者から中級者のためのはじめの一步 基本のすすめ -

はじめに

私の解析への関りは、“有限要素法、それって何？から始まりました。

1991年1月 FEM 解析を社内で立ち上げる部署として、その担当者としてこの CAE/FEM 解析に携わり始めて27年経ちました。特にゴム製品の解析という、材料データ定義から解析に至るまで、大変形&非線形という問題を一つずつ乗り越えて解析の予測精度を向上、解析の効率化を実践してきました。しかしながら、物理系苦手な化学系で大学進学、英語も大学で何度も単位を落としながら再履修でやっと卒業。当時の解析マニュアルはすべて英語で理解することだけで非常に苦労しながら、気が付けば今に至っています。

2000年にあるベンダーさんのユーザー会での発表で大きな反響をいただき、会社からは、“良くわからないけど社外で認められるのはたいしたものだ”ということで、大変動きやすい環境に変わったことを覚えています。

当時、1日20件程度の社内からの依頼、モデル数で100以上、時には1件の依頼書に30モデル位、自動化しないと到底やっていけないという切羽詰まった状況から自動化を推進、精度が確立され自動化から担当者が短時間で解析できる環境を作り出したことで、そこから開発担当者が自ら解析するネットワークをマニュアルと共に作り上げることができました。担当者解析による失敗も数多くありましたが、少しずつ改善を重ねてシステムを作り上げてきました。設計・開発担当者への教育と更なる自動化の推進と手順書により1時間程度の開発者への教育を行うことで、担当製品は開発者に任せて、自部門としては新規・特殊な問題を扱い、そのことで効率的にまわるようになりました。自分の製品を解析することでより大きな気付きにつながったことは、開発者にとってネットワークを構築して非常に大きな成果として感じています。ただ、今考えるとここまで一步一步進んでこれたのは、困りごとがあるともがきにもがいたことが幸いしたのか、その時々で社内外問わず必ず誰かが助けの手を差し伸べて下さったこと、皆さんの助力によるものが大きかったことでした。機密ということがそれほど厳しく問われなかった時代だからできたのかもしれませんが。

そのため、いつか恩返しができないかと2008年にCAE解援隊のサイトを立ち上げ、ゴムの解析についての有用な情報を発信してきました。本年、さらなる分かり易い情報発信のため、パワーポイントでの情報発信ができる寺子屋のサイト (<https://terakoya2018.com>) を開設しました。これまでのノウハウを可能な限り公開していこうと考えていますので、本書と併せてご活用ください。

本書を書くにあたり、丁寧に分かり易くということを心がけてきましたが、残念ながらうまく表現できていない面もあります。その際は、遠慮せずにHPの問い合わせから説明を求めているいただければパワーポイントのアニメなどで分かり易い説明資料をお送りさせていただきます。

それと共に HP を充実させていきます。

更に、材料サンプルの無償提供などもありますのでご活用ください。

これまでゴムの解析で試行錯誤を重ねた中で、テストピース形状によりヤング率 $E = \sigma / \epsilon$ が必ずしも成り立たないこと、また大変形であるゴム材の特徴からも簡単ではないことが分かってきましたが、当時、解析の立ち上げ段階で、この点だけで2週間近く悩むことができ、悩む時間が与えられたこと、理解ある上司やいろいろな人に支えられ、巡り会いからいろいろと教えて頂けたことを思い出し、感謝しきれません。

ある意味、終活の一環として、皆様への恩返しとしてこれらのノウハウを残せればと、それほどの知識ではありませんが、隠すことなくすべてを書き残したいと考えています。

有限要素法の理論、ソフトのアルゴリズムなどは数学的、物理的な知識が必要ですが、筆者がそこまで説明できるかわかりませんが、丁寧に分かり易く記すことでご容赦いただきたいと考えています。

少し脱線も多いです。全く役に立たない情報かもしれませんが、ある人にとっては重要な情報になりうることをコーヒブレイクとして、

記載しています。これは、いかにいろいろな方々に力をお借りして、どのように考えたかが少しでもヒントになると思います。主としてエネルギー定義の系統的なまとめとゴム特有の問題点を解決しつつ、どのように定義をするか具体的に残したかったこと、ゴムの解析は難しくないことなどを中心に、横道にそれつつ記述させて頂いておりますので、興味のないところは読み飛ばしてください。

(モデル提供もご用意があります)

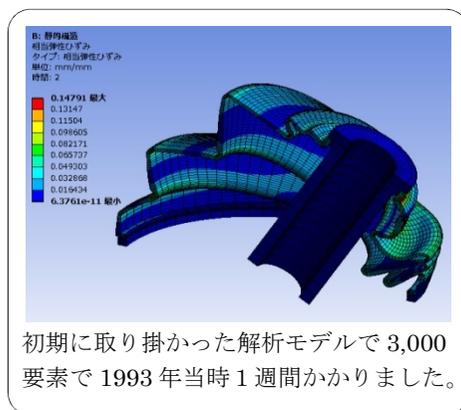
読み飛ばしたら何もなかったということにならないよう頑張って描いております。

数学、物理を逃げてきた道で今の道へ戻りながらの私でも、ある程度皆様に認めていただけるような知識を発信できるかもしれないことを踏まえて、読者の方々はより高みを目指していただけるよう説明を丁寧に入れさせて頂きます。

また、どなたかの言葉ですが、心に残っている言葉としていつも思い返している言葉から“CAEは効率化のツールである。効率化した時間を技術者が考える時間として使うべきもの”というようにツールであって、使うものです。解析システムは電卓です。

昨今の時間の流れのはやいこと、お忙しい技術者の近道を示せればと考えています。

おまけの項に、CAD/FEM 解析の自動化を進め、効率化も推進してきた概要や耐久性についての一つの考察を追加させて頂いております。



高校は進学校にもう少しで届くところでしたが、高校はインターハイも2度ほど出場するような生活で勉強を怠っており、勉強に飢えていた為に方向転換で大学は1年浪人して工学部系に化学で進学、いまは物理系で生活しております。

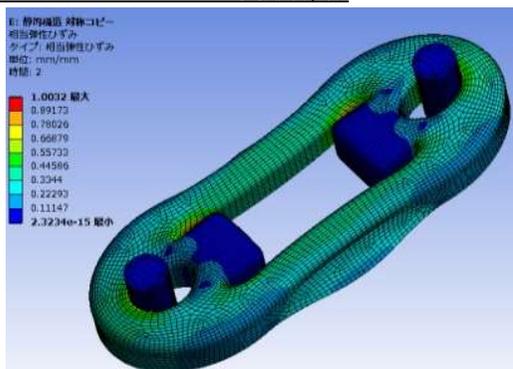
そんな私でも出来た(?)、ということを考えれば、読者の方々はたやすい道(?)かと考えています。様々な見方から説明していますので、少しでも参考・近道に繋がる資料となれば幸いです。不明な点は遠慮なくお問い合わせください。

(巻末連絡先 検索キーワード：ゴムの解析、寺子屋 2018)

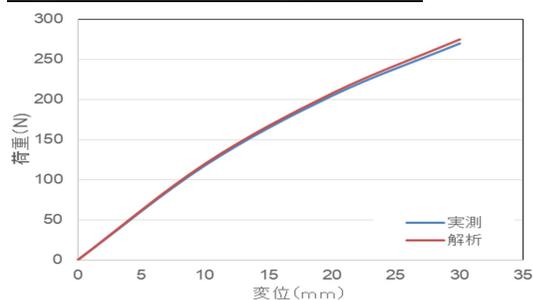
— 解析事例 —

多くのゴム製品はばね特性を製品規格としているため、変位に対する反力(荷重-たわみ特性)で示すことが多いので、その予測の精度をグラフで表しました。実測と解析が良く一致しているため、グラフ線図が1本に見えることもあります。

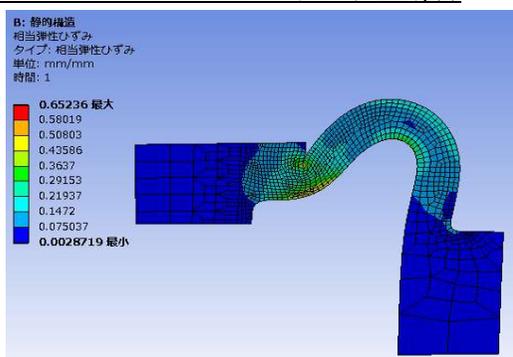
マフラーマウントの変形解析



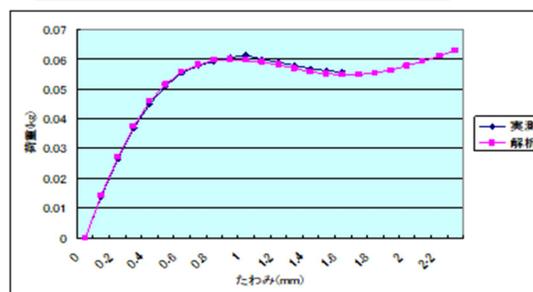
荷重-たわみ特性 (反力と変位の関係)



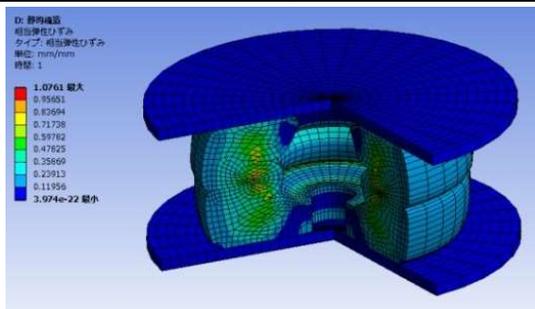
ラバーコンタクトのクリック特性解析



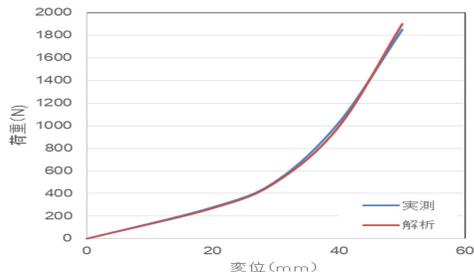
荷重-たわみ特性 (反力と変位の関係)



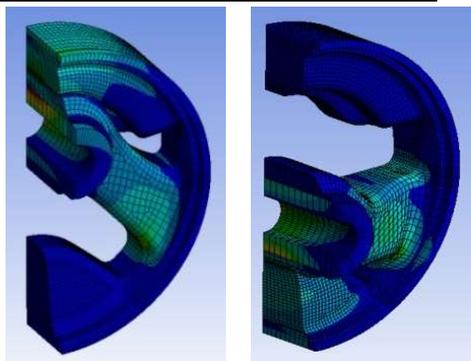
ラバークッションの変形解析 (50%圧縮まで)



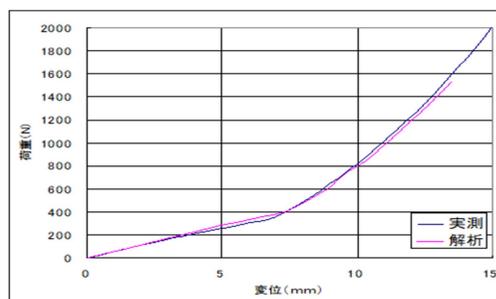
荷重-たわみ特性 (反力と変位の関係)



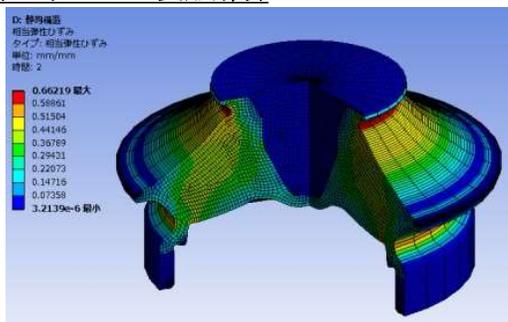
ハの字型エンジンマウントの変形解析



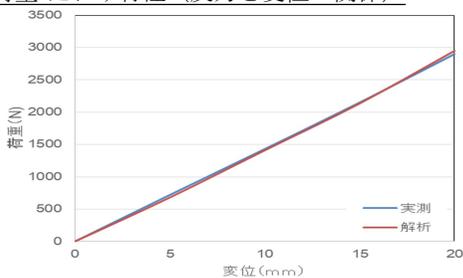
荷重-たわみ特性 (反力と変位の関係)



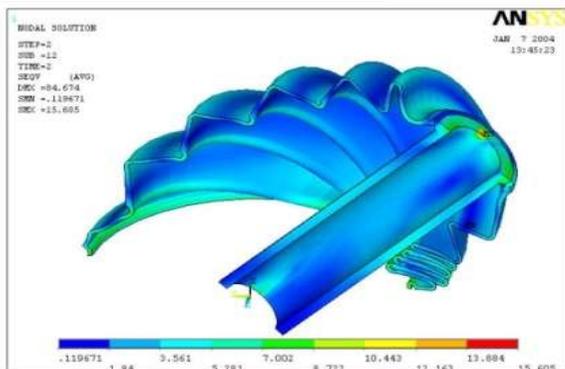
円錐マウントの変形解析



荷重-たわみ特性 (反力と変位の関係)



等速ジョイントブーツの変形解析



X線測定での変形形状比較



--- 目 次 ---

I	ゴムの解析用材料データについて	
1	ゴムと金属材料の違いについて	・・・ 8
2	ゴムの解析概要	・・・ II章の前に少しだけ
3	ゴム材料について	・・・ 10
	1) ゴムとは、ゴムを良く知ること	
	2) ゴムの特性の基礎	・・・ 12
	・何回目の特性か	・ゴムの履歴効果
	・ゴムの熱時の剛性について	
	**** コーヒーブレイク：硬度とせん断弾性率の関係	・・・ 15
4	ゴムの物理的材料定義について	
	1) ゴム材料の定義：エネルギー関数	・・・ 15
	ネオフック式、Mooney-Rivlin 式、Mooney 高次式、Ogden 式など	
	2) 解析用材料定義、測定から係数回帰の方法	・・・ 17
	① 変形状態の名称	
	② 二軸試験の意義	
	③ 製品が圧縮領域なのになぜ伸張試験で表現するか	
	④ 二軸試験機について	
	⑤ 試験機の原理と有効断面について	
	**** コーヒーブレイク：簡易二軸試験機（一軸拘束用）	・・・ 21
	⑥ 二軸試験から得られるデータ	
	⑦ どのデータを収集、使用するか	
	**** コーヒーブレイク：二軸試験機の正当性確認	・・・ 25
	⑧ 実際の回帰例 一軸拘束二軸試験の実際・・・回帰まで	
	具体的に手順を追って、データ測定から調整、回帰と検証まで説明します。	
	3) エネルギー関数と特性線図の関係	・・・ 30
	4) Mooney 式及び Ogden 式の回帰係数とヤング率の関係	
	5) そのほかのエネルギー表現の工夫	・・・ 31
	**** コーヒーブレイク：エネルギー関数、二軸試験私の関わり合い	
	6) 各定義式の優位性	
	***** コーヒーブレイク ゴムの非線形性の利点	
	7) 二軸試験ができないとき 一短軸試験への倍数という考え方	
	***** コーヒーブレイク ゴムの変形は良く合う変形合う、だから勘違いします	
5	ゴムの物理的材料定義について -Part 2-	・・・ 34
	1) ネオフック式での精度	

2) ネオフック式の係数 C10 定義について	・・・ 3 5
① 基本的な共通課題：ゼロ点はどこですか？	
② ヤング率 $E = \text{応力 } \sigma / \text{ひずみ } \varepsilon$ の式は正しいか	
③ ダンベルと短冊の違い	
*****コーヒアブルック：材料データの平均ということの弊害	・・・ 3 9
④ 短冊以外での測定：伸張測定ではなくディスクの圧縮測定では	
⑤ 真のヤング率を求めるには	
***** コーヒアブルック：体積弾性率の変化による計算結果への影響	・・・ 4 1
6 I 章のまとめ：エネルギー関数の定義	
7 超弾性から粘弾性	・・・ 4 3
***** コーヒアブルック：この時代の管理者の役割、分業と任せるということ	
 II 超弾性体の解析	
0 概要：：解析の考え方/熱収縮も	・・・ 4 5
1 ゴムの解析基本フロー	
2 加工工程である熱収縮を考慮する理由	
3 解析条件、金属要素部の定義	・・・ 4 8
1) ゴムの解析における金属要素の扱い	
2) 各パーツの剛性	
i) 解析時のピンの剛性と固定方法	
*****コーヒアブルック：完全固定という言葉、開発担当とのコミュニケーション	
ii) 試験機剛性：最終的には解析で試験機の一部をモデル化する	
*****コーヒアブルック：測定によるもう一つの問題	・・・ 5 1
4 材料定義における注意点	・・・ 5 2
1) 硬度 2) 熱収縮 3) その他	
*****コーヒアブルック：変形解析の副産物としての熱的解析	
5 メッシュ：大変形、細部の変形形状を考慮したメッシング	・・・ 5 6
1) 大変形時のメッシュの切り方	
2) 必要な細部を表現できるように切る、ということ	
***** コーヒアブルック：メッシングの参考	・・・ 5 8
6 拘束条件	
7 解析ステップ：非線形ゆえのステップの難しさ	

8	解析結果の見方と注意点	・・・60
	i) ひずみ出力について	
	ii) 金属との境界でのゴムのひずみの見方	
	iii) 応力と面圧の違い	
III	解析精度を向上させるための因子について	・・・62
1	製造工程によるゴムの熱履歴とそのモデル表現について	
2	寸法公差・剛性公差	
3	金具の寸法精度と絞り加工	
4	モデリング	・・・64
	1) 平面応力と平面ひずみ	
	2) 要素分割の基本と精度の関係	
	i) ばねを定義するための変位反力の解析	
	ii) 変位形態を確認する、固有値を含む変形モード解析	
	iii) 分割のちょっとした失敗で剛になる例	
	iv) シールリップ部の詳細な先端の変形を確認する解析	
	***** コーヒーブレーク：固有値解析、熱的解析に必要な質量密度について	・・・68
	3) モデル簡略化	
	i) クランクシャフトの shell/Beam	
	ii) shell要素での布表現	
5	結果の見方	
-----	付録：おまけのお役立ち情報	・・・69
	1) 解析にすぐに使えるサンプルデータ	
	2) 粘弾性データへのつながり	
	3) 解析環境の整備	

謝辞

参考文献

おわりに

筆者経歴

I ゴムの解析用材料データについて

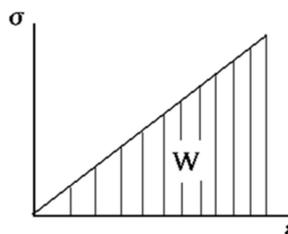
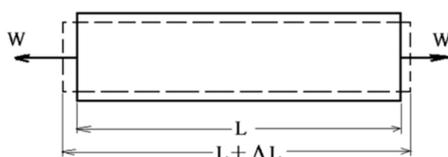
1 ゴム材料と金属材料の違いについて

ゴムについては材料定義を Ogden さんや Mooney さんがエネルギーの式を提唱しています(後述)。幸いにも金属については、ヤング率、ポアソン比及び大変形域で塑性を示す降伏応力と加工硬化係数での解析方法や材料データも書籍やネット上に数多く存在しています。しかし、ゴムについては文献に様々な研究を論文で発表されているにもかかわらず、系統的に書かれているものは少ないと思います。

金属材料は線形領域で、

$\sigma = \varepsilon E$ で表現されます。 σ : 応力 ε : ひずみ E : ヤング率

ひずみは $\varepsilon = \Delta L/L$ として定義されます。



金属は力を加えて、ひずみ 0.1(10%)程度の変形を与えると、塑性域の変形になり元の形に戻りません。しかし、ゴムは大変形で剛性は金属の 10^5 分の 1 程度で非線形特性を示しますが、ひずみ 1.0(100%)程度変形させてもでも元の形に戻ります。

ゴムは、大変形が故の断面積が変化するために非線形を示すことと材料自体の非線形性を示すことが材料定義を難しくしているようです。

ゴムの特性を理解するうえで、難しい式で表現されますが、**ゴムそのものの成り立ちと製造方法などを知らないことが大きな要因**に思えますので、その点も説明します。

大きなところは、ゴムのヒステリシスとへたり特性にあると思われます。

ゴムの良く知ることで、超弾性の解析もそれほど難しくないことを理解していただけると考えています。本書の構成について、サイバネットシステム(株)さまのご協力を得て解析例を前頁、この後も掲載させて頂いております。それらは**解析の材料定義をコツコツ**と行い、**金属と同様に製造工程の残留応力を考慮することで予測精度が格段に向上し良好な例ですが、特別なものではありません。**

参考：設計技術者のための有限要素法 はじめの一步 栗崎彰様著 講談社

CAEを使いこなすための必要な基礎工学 岡田浩様著 日刊工業新聞社

私のように物理系、力学を学生時代に学んでこれなかった方に非常に参考になる資料です。

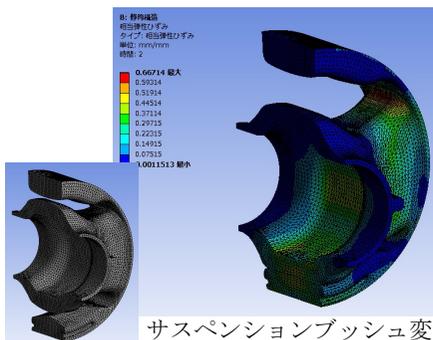
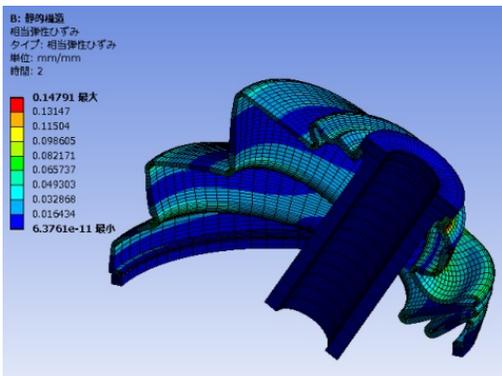
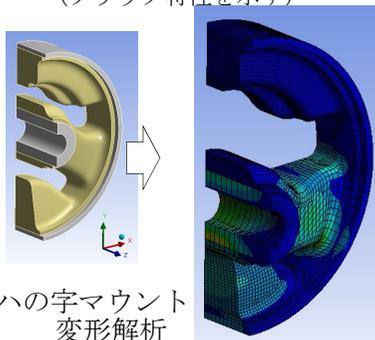
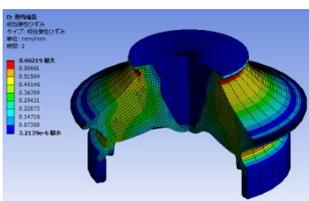
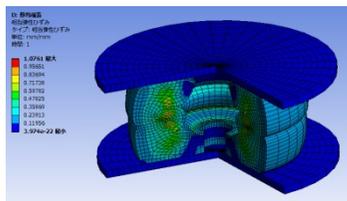
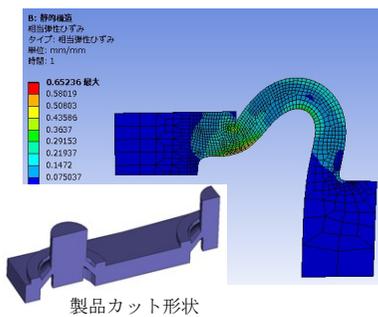
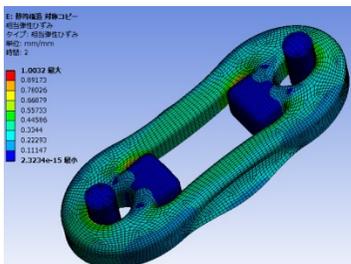
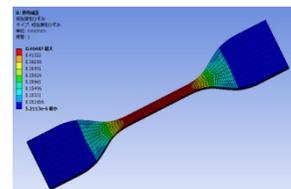
2 ゴムの解析概要

詳細はII章で述べますので概要と言う意味で、説明します。

“ゴムの特性予測は30%以内の予測ができれば十分です、良好な方です。” という言葉を最近でも良く聞きます。はたしてそうでしょうか。私の経験から解明できていないものも少なからずありますが、10%以内での予測はそれほど難しくありません。

ゴムのことを良く知り、製品の使われ方・測定の方法をしっかりと把握していれば、数%以内の差で一致するできることを経験しています。良くあることですが、実際の製品と形状が違うこと、解析条件と測定方法が合っていない、このようなことは意外にもゴム製品の分野で多く発生しています。このような失敗例も参考になるよう、いくつかちりばめて紹介していきます。

解析の例



3 ゴムの材料について

1) ゴムとは、ゴムを良く知ること

ゴムには天然ゴムと合成ゴムというものがあります。天然ゴムは、天然と言われるように自然界に存在します。ゴムの樹木の表皮を傷つけ樹液を採取し、水分を蒸発・乾燥させて半透明のゲル状のゴムを得ます。ゴムが黒いのは、加工する際にカーボン（黒色）という炭のようなものを混ぜ込むからで初めから黒色ではありません。近年ではホワイトカーボンとの配合することで着色料によりカラフルなゴム製品もあります。

天然ゴムはポリマーで高分子構造をとります。

その個の単位であるモノマーはイソプレンと

いうもので、香水の原料として使われます。

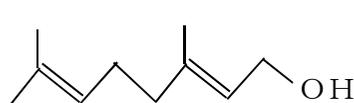
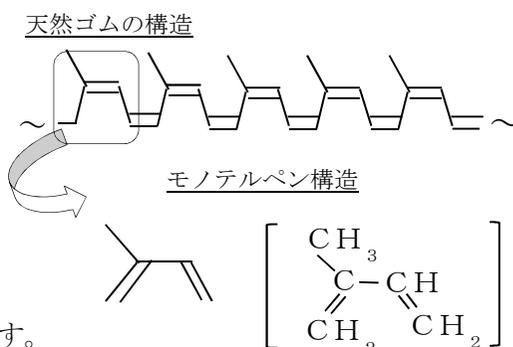
でビタミンEなどの原料にもなります。

学生時代の卒論では、テルペン合成の研究で

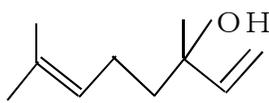
論文にもなっていますが、構造もうる覚えです

少し脱線しますが、いくつか化合物を紹介します。

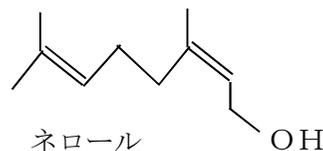
香水に含まれる成分です。



ゲラニオール
(バラの香り)



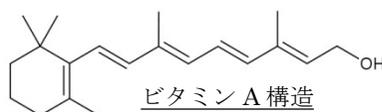
リナロール
(ラベンダー臭)



ネロール
(若いバラ臭)

さらには、ビタミンAやEのようなものにも合成されます。

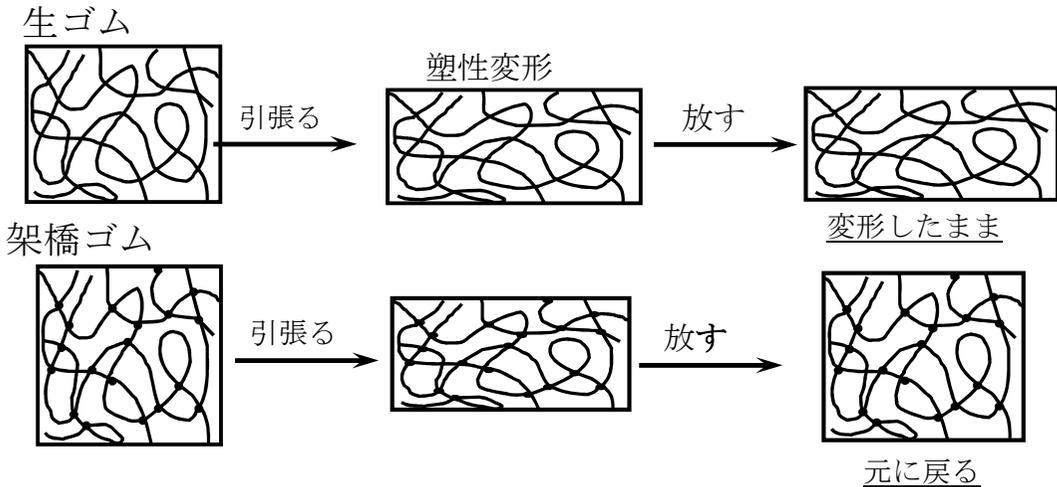
テルペンの科学 <http://www.org-chem.org/yuuki/TUS/6terpene.pdf>



ゴムは生ゴムと架橋ゴムとに分けて考え、製品にするには配合して熱と圧力を加えて変形しても形状が元に戻るよう加工します。

模式的に変形形状を考えたものが、次のページの図になります。

これも深堀先生の絵をまねたものです。深堀先生の著書では、非常に丁寧にゴムについて書かれていますので、そちらを参考にしてください。



※深堀先生の本を模倣させて頂きました。

配合等、詳細については、日本ゴム協会のゴム技術入門など参照頂くとして、ゴムは、
 ポリマー+カーボン（充填剤）+架橋剤+反応助剤+オイル などの混ぜ物です。
 つまり、**ポリマーと補強のための充填剤と架橋剤と他の薬品を練り合わせた**ものです。

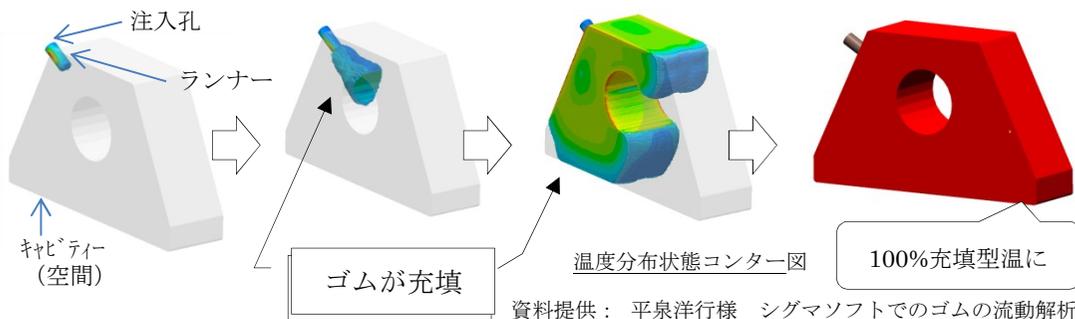
先ほどのゴムの模式図に
 深堀先生はスパゲティーで
 模式図としましたが、そのまま
 コピーするわけにいかないので
 私もイカ墨パスタを作ってみました。
 実際にはカーボン●（黒丸）
 が練り込まれるので、補強され黒色になります。



カーボン●が混ぜられる

スパゲティーの麺の間にカーボン、グリンピースの
 ようなものが入って変形に抵抗を与えるように考えてもらってもよいと思います。

解析は、金属も同様ですが、ゴムの加工方法を知ること、解析予測精度を向上させるヒントになると信じています。ゴムは、150～180℃の金属の金型にゴムを注入し、キャビティーという中空の空間に密閉して更に熱と圧力を加えてで反応、一定時間後、型から取り出して冷えたものが製品ですが、このときに熱収縮します。



資料提供：平泉洋行様 シグマソフトでのゴムの流動解析

100%充填された状態で 10 分、160°C程度（製品にもよります）の温度と圧力をかけて架橋します。架橋剤を、加硫剤と表現されることがありますが、硫黄を使って架橋反応させたことからこの熱と圧力をかけた成型工程を硫の字を使った加硫と呼びました。

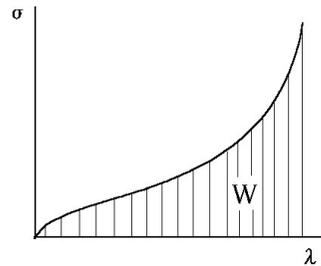
1) ゴムの特性の基礎

ゴムは非線形性を示すと一言で表現されます。非線形とは線形に非ず、ということで金属のようにヤング率とひずみの関係で簡単に書けないものです。

一般的な表現として、エネルギーWは

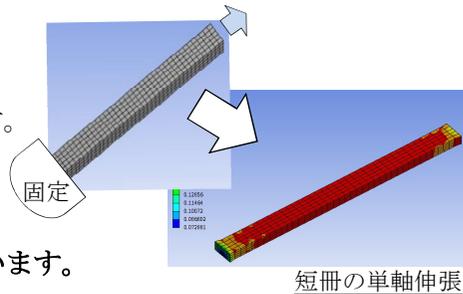
$$W(\lambda) = \int \sigma d\lambda$$

$$W(\lambda) = \int (\sigma_1 d\lambda_1 + \sigma_2 d\lambda_2 + \sigma_3 d\lambda_3) \lambda \quad \text{と表現します。}$$

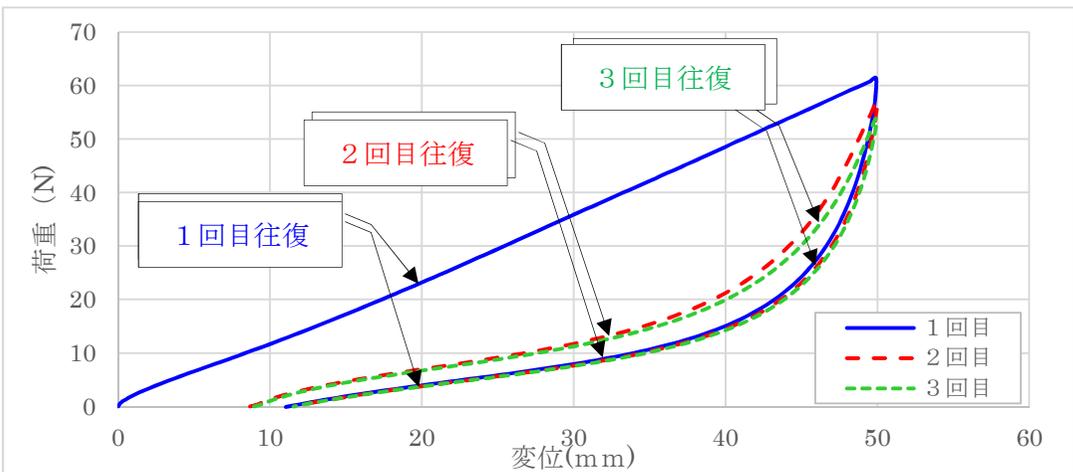


λは伸張比 (λ = 1 + ε) ε: ひずみ 添え字 1,2,3 は主軸になります。

ゴムの特性を表現するうえで、右図のように短冊の伸張一戻しを、1回、2回、3回と繰り返すと特性が異なるということがあります。防振ゴムのJIS規格は、3回目の測定とされていますが、何回目の特性が必要なのか明確に掴めていないことがゴムを複雑にしています。自身で何回目の特性を考えるか明確にすることです。



例えば、製品の特性予測で製品の実測は3回目の実測を、解析で予測しようとする場合材料試験は1回目の特性を処理して、その1回目のエネルギー回帰をして解析に用いている場合が見受けられます。ゴムの1回目、2回目の特性は大きく挙動が異なりますが、2回目と3回目は、近い特性になります。



また、3、4、5・・・回目はほぼ同じ特性になります。何回目を解析により求めるか、理解しないで解析を進めている場合を、良く目にします。

予測する製品が、3回目の測定なのに材料試験は1回目のデータを使うなど、ちぐはぐな状況は、いままで何度も遭遇してきました。製品でもこれは同様です。

いずれにしてもゴムの非線形性などの特徴をすることが、近道になると思います。

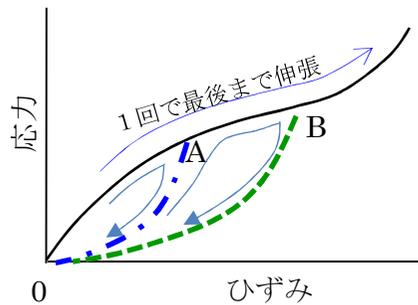
ゴムは行きと戻りの特性が違うこと、更には履歴効果というものがあります。

粘弾性領域なので、ここでは簡単に説明します。

1回でB点を超える伸張を与えた特性があります。

この特性を新しいサンプルで、A点まで伸張し、戻すと、一点鎖線（青）をたどります。

そのサンプルでBまで伸張した場合、先ほどの戻り特性をたどりA点を通り、初期の特性（1回で最後まで伸張）を通り、B点まで行きます。戻りは破線（緑）の線図になります。



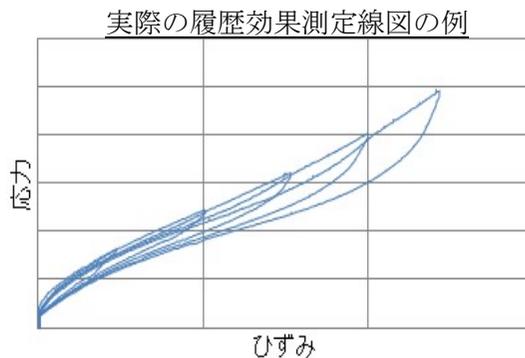
これが履歴効果で、この特性も予測を複雑にしています。

ただし、履歴効果は実際はそんなに綺麗な線図を示すものでもなく、戻ってきた特性を往くのではなく中間的な位置を通る特性になります。

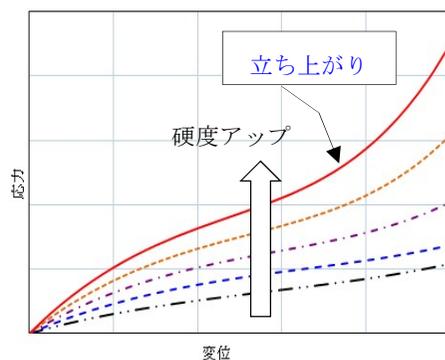
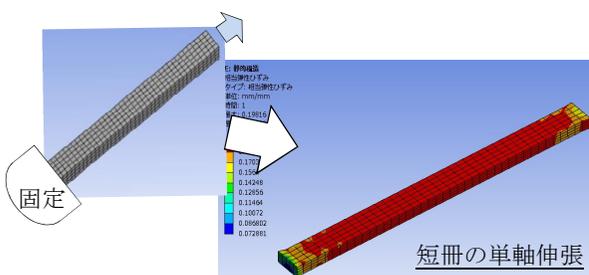
明確な理論は、粘弾性、ダメージ効果

としての表現になりますので、ここでは触れずに進みます。

若干のお役立ち資料はありますので、今後 HP へ掲載していこうと考えています。



基本に戻りますが、ゴムは配合としてカーボンや架橋剤を増やすことで超弾性領域の剛性をあげることができます。すなわち、硬度と共に剛性が上がります。



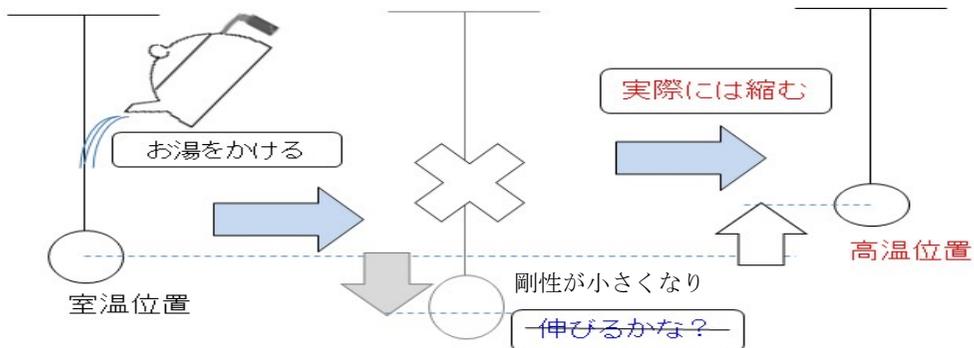
硬度・剛性が上がると変位に対する応力が上がると共に、立ち上がりの変曲点を持つようになります。メカニカルデザインさんの技術冊子 EngineeringSheetNo.C003-E047、日本鉄道車両工業会防振ゴム/現代工学社 によれば硬度と剛性（せん断弾性率）の関係式が明確にされています。参考にしてください。

ただし、硬度はあくまでも瞬間の剛性であり、特性を示すヤング率（せん断弾性率）の間には1対1の関係ではないことも覚えておいていただきたい。

もう1つ考えておかなければいけないことですが、**熱時の特性**です。ゴムはエンジンマウントなどの製品のように、エンジンルームなど高温で使われる製品があります。熱時の特性も把握しておく必要もあります。金属は、100℃の変化でも5%までの剛性変化はないはずですが、**ゴムは金属と違って、温度依存性が大きいという特徴**があります。熱時の物性については、それぞれ特徴があり一概には言えないと思いますが、これまで扱ってきたゴム材で高温80～100℃と室温の剛性を比較すると、

高温剛性：小 < 室温剛性：大
になります。この説明として、温度を上げることによりゴムの分子間のエネルギーが活発になり、変形に対する抵抗が少なくなると言われます。例えば、よく勘違いされがちですがゴム紐に重りをつるして、お湯をかけるとゴムが収縮する現象があります。

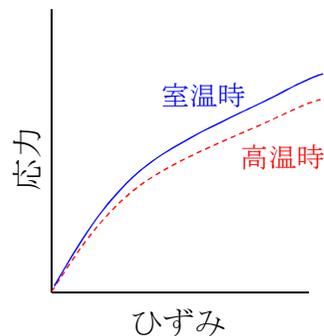
重りをゴム紐につるしお湯をかけるとどうなるか



これはあたかも剛性があがった、**熱時の剛性が高いように**思われますが、これは応力緩和（クリープ）特性の影響で、全体の剛性と勘違いされるからです。

さらには、**速度依存性**というものがありますが、静的な測定では影響は小さいので、ここでは詳細の説明はしませんが、精度への影響（Ⅲ章）で若干触れます。

室温と高温時の特性

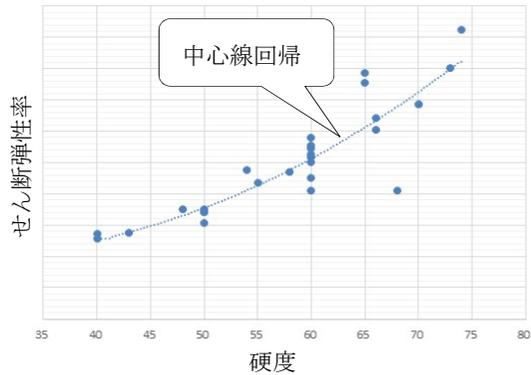


これらゴムの基本特性を踏まえて解析を行うと新しい解析の見方ができると思います。

***** コーヒーブレック 硬度とせん断弾性率の関係 *****

硬度とせん断弾性率の関係を実際のデータを基に示します。

平均を示す中心線に対して、大きく外れるデータもありますが、これが実態です。だからと言って、これらのデータが使えないものではなく、製品の解析に有効で良好な予測精度を示すデータです。

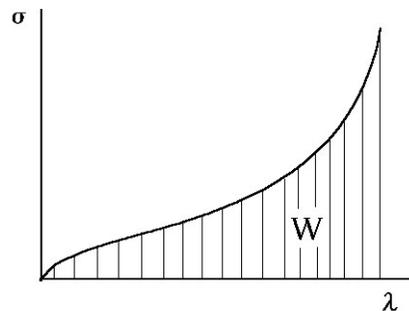


4 ゴムの物理的材料定義について

- 1) ゴム材料の定義：エネルギー関数
一般的には、

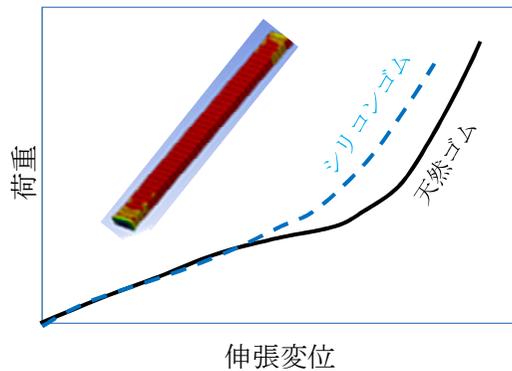
$$W(\lambda) = \int \sigma d\lambda$$

のように定義されます。



剛性により特性が変化することは説明しましたが、初期の剛性が同じでも大変形時の特性が異なることはポリマー種が変わることで良くあります。

また、同じポリマーでも配合、特に充填剤のカーボンの粗さを変えただけで、やはり右グラフのような違いが認められます。



これらの複雑な特性の違いを表現する式を、様々な方々が研究されています。代表的に使われている表現式が、MooneyさんとOgdenさんの式です。始めに、データ元の実測データが同じであれば、どの回帰式でも解析予測精度は同じになるということで、データが重要であること、回帰式は何を用いても良いと考えます。つまり数学的表現が変わっただけで、Mooney式でOgden式でも形が変わっても本質は変わりません。Mooneyさんの高次の式は、確かJGS式とも言われ初期の表現から進化しています。(師匠である坂口先生から少しだけMooneyさんのことを聞いたことがあります、日本

合成ゴム（現 JSR）さんで机を並べたのが研究のきっかけのようです。

ゴムは、非圧縮性から体積変化がないと言われています。

それを表現するため、テンソルを

λ （伸張比） $= 1 + \epsilon$ （ひずみ） 伸張比を使って表現しますが、右図のように一方を伸張すると他方に圧縮するなど変化します。

これを体積効果として表現します。

$$I_1 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1 \quad \text{[体積効果]}$$

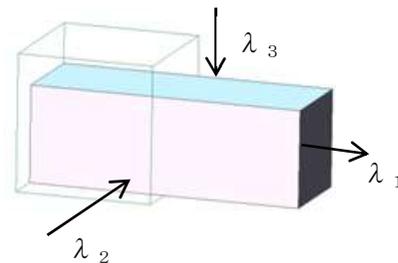
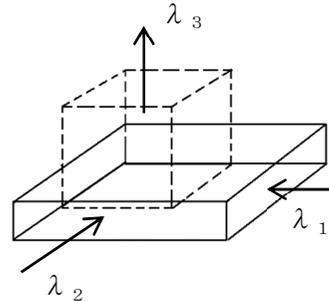
1 は体積一定を表します。別方向への変形で見ても、この式は成り立ちます。

エネルギー式 W を表現するため、

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad \text{[対角線効果]}$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \quad \text{[面積効果]}$$

として、各種の定義がされています。



最も単純な式として、

$$\text{ネオフック式 } W = C_{10} (I_1 - 3) \quad \dots (1)$$

ここで、 C_{10} はヤング率の 6 分の 1 という関係があります。 $C_{10} = E/6$ としてヤング率が分かれば単純に定義できます。ただし、ヤング率の定義が厄介なことは後に触れることとします。単純伸張/圧縮での応力÷ひずみがヤング率にならないのです。 ($E \neq \sigma/\epsilon$)

次に複雑なものが、Mooney-Rivlin 式です。

$$W = C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3) \quad \dots (2)$$

単軸で表現したものが良く $1/\lambda$ に対するプロットで議論されました。

そのほか、

Mooney 高次式 (JGS 式)

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \dots (3)$$

ここで少しエネルギー式に触れておきます。一般的に C_{ij} の係数で、

$$W = \sum C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad \text{と表現されます。}$$

参考体積弾性率：1,000～80,000 などの文献があります。また、元滋賀県立大山下義裕先生の測定結果など。

文献：日本ゴム協会誌 第 59 巻第 7 号(1986)芝浦工大 藤本邦彦氏 手塚悟氏

また、Ogden さんは分解すると同様ですが、この Σ で直接表現されています。

Ogden 式

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) \quad \dots (4)$$

※ソフトによっては、 $\alpha \Rightarrow 2\alpha$ と置き換えていますので注意

他、アルダさん・ボイスさんなどの式が一般的にソフトに使われています。

ソフトによっては mooney さんの高次式を C02、C03 などの係数を使い

$$W = C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3) + C_{02} (I_2 - 3)^2 + C_{03} (I_2 - 3)^3 + C_{11} (I_1 - 3) (I_2 - 3) \\ + C_{12} (I_1 - 3) (I_2 - 3)^2 + C_{21} (I_1 - 3)^2 (I_2 - 3) + C_{20} (I_1 - 3)^2 + C_{30} (I_1 - 3)^3$$

として自由度をあげて、表現力を拡大しています。

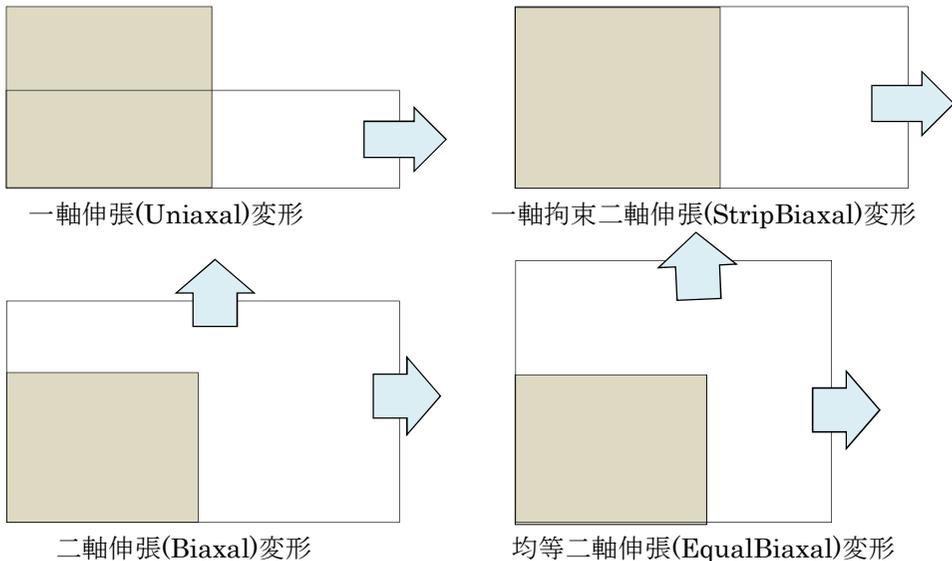
2) 解析用材料定義、測定から係数回帰の方法

様々な表現式が提案されていますが、いずれの定義の式を使う場合でも、変位に対する荷重を測定する必要があります。

ここでは、Mooney さんと Ogden さんの式、回帰による定義の方法を説明します。アルダさんとボイスさんの定義した式も、同じデータから回帰を行ったことがありますが、同じデータから定義した係数での解析は、これらの高次の式からは同程度の精度で解析できたと記憶しています。

① 変形状態の名称

二軸試験の変形のタイプには、次のようなものがあります。



② 二軸試験の意義

重要な点ですが、短軸試験と異なる点は

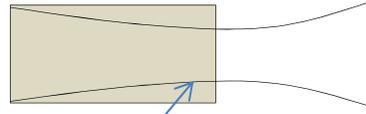
二軸試験を行う理由は、先に示した式からわかるように、式は3方向の伸張比 λ_1 、 λ_2 及び λ_3 を定義する

必要があり、短軸では2方向目の伸張

比を表現できないため、二軸試験機による一軸伸張とは明確に異なります。

2方向の伸張気が決まると、ゴムの非圧縮性から3方向目の伸張比も明確に定義

できるということです。しかし、単軸試験は $\dots (I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1)$



こちらの伸張比 λ が不明

③ 製品が圧縮領域なのになぜ伸張試験で表現するか

もう1つの重要な点に触れておきます。なぜ、製品の多くは圧縮試験なのに、伸張試験から求めたデータで解析ができるのかという質問を多く受けます。

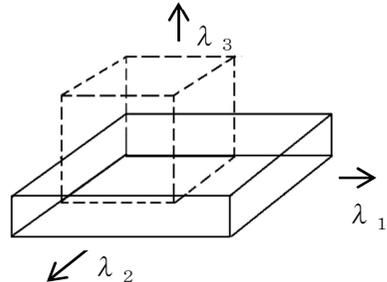
答えは単純明解で、例えば2方向 λ_1 と λ_2 を伸張（二軸伸張）したとき、表現式

体積一定のため、 $I_1 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1$ [体積効果] から圧縮側 λ_3 を

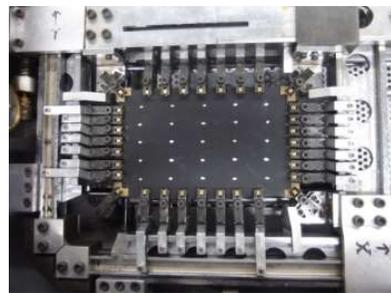
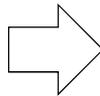
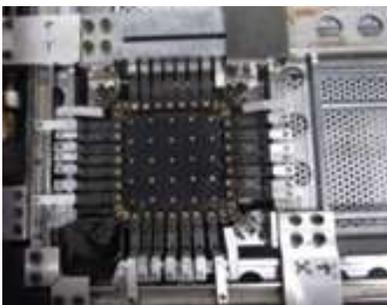
$\lambda_3^2 = 1 / \lambda_1^2 \lambda_2^2$ として

圧縮との関係を明確に表現できるからです。

伸張試験であれば、より小さい荷重で均一に変形させることができますが、逆に、圧縮試験で均等に変形させるのは至難の業です。これも理由の1つです。



その為に二軸試験の概要です。均一性が重要な試験で、図に示すような変形概要、一軸拘束二軸試験のようにゴムの伸張試験を行います。

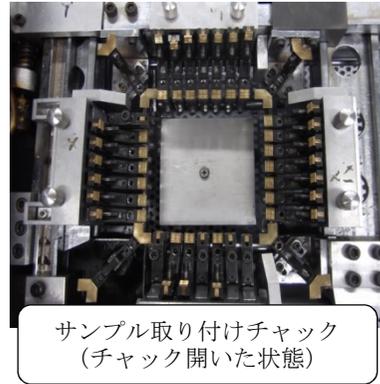
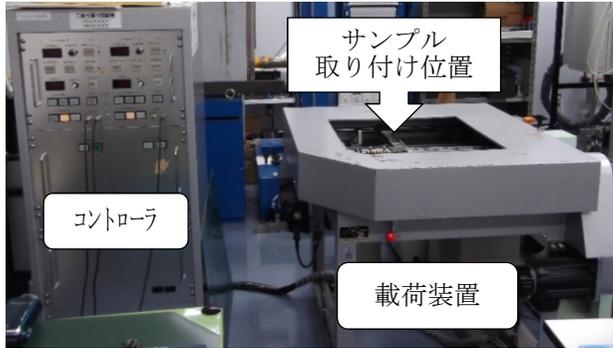


一軸拘束二軸伸張試験 (Strip Biaxial Test) 概要 (純せん断試験とも呼びます)

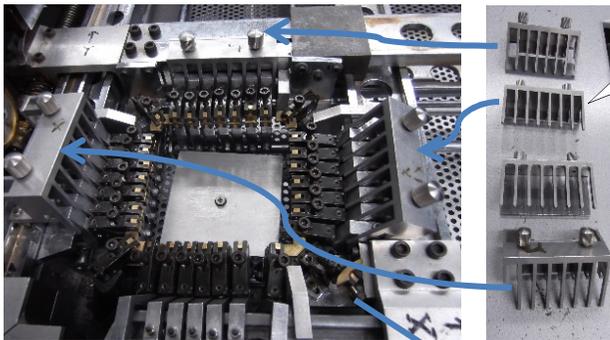
④ 二軸伸張試験機について

二軸試験は、写真のようなコントローラと本体、現在は接続したパソコンで変位

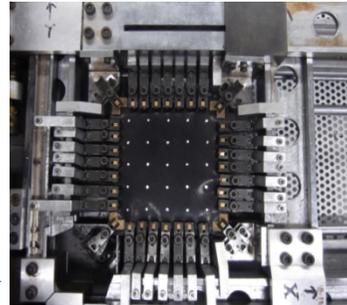
と荷重を保存して、電子データとして扱えます。



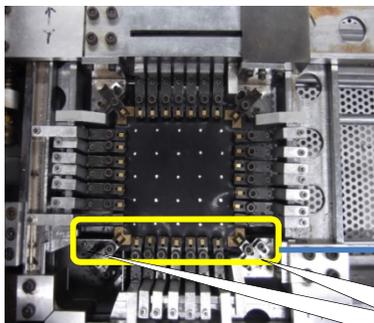
富山工業試験場生活工学研究所 岩本製作所 (現アイエス技研) 様 [京都]製の試験機です。



チャック間を均等に配置するためのスペーサー



チャック部構造は、



※X、Y方向共に、4辺のゴム位置を中央に
また、AおよびBを同じ長さにする。

角はロードセルから逃がして荷重を採らない

参考

現在、一般の方が使用できる公共機関の二軸試験機は富山の産業技術研究開発センター/生活工学研究所所有の試験機のみと認識しています。
<http://www.itc.pref.toyama.jp/summary/section020.html>
測定のご指導、写真の掲載でご協力いただいております。



チャック部の構造は、



⑤試験機の原理と有効断面について

加硫 SBR の有限変形解析 同志社大学坂口一彦氏 日本機械学会論文集 (A 編)
 51 巻 463 号 昭 60-3 P604 で有効断面について、川端先生の論文 (機械学会)

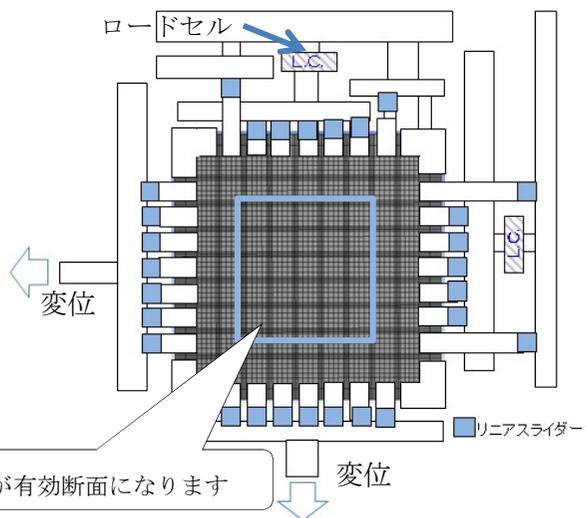
StrainEnergyDensityFunctionOfRubberValcanizateFromBiaxialExtension

H.kawai, S.Kawabata Kyoto Univ.DepartmentPolymerChemistry 606

では試験機の原理が紹介されています。 概要は次のようなものです。
 出展が不明確ですので、必要な方は論文のコピー (PDF) をお送りいたします。

均等変形であることと雑荷重を拾わないことが重要です。
 特に、四隅の荷重を拾わない工夫があり、試験機の原理からその対策が取られています。

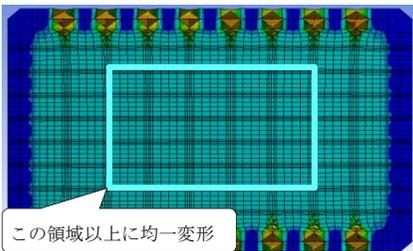
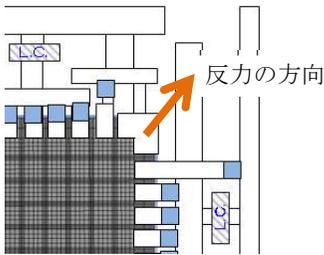
ロードセルに繋がるバーは中の5つのみで、その外側と四隅の荷重は逃がすことが重要です。



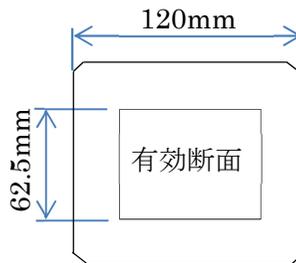
この領域が有効断面になります

二軸試験機作成で重要なことは、

- 1) 四隅の荷重は、試験での荷重として加算しない。
理由：反力の方向から、X、Y方向へ分離不可能
- 2) 均一に変形すること
サイバネットシステム様のご協力で、伸張試験での変形が均等であることを確認しましたが、実験でもマスを引いて均等に変形する様子を写真で確認しました。
- 3) 有効断面で得られた荷重を割った応力とする。
ひずみ、伸張比、応力についての詳細は係数算出の項で



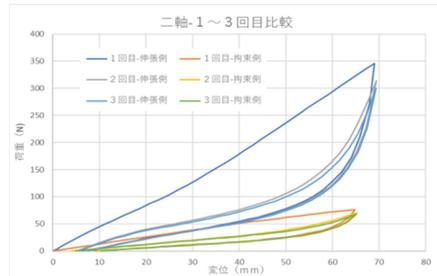
ANSYS での二軸試験片の均等性の確認図



文献：
加硫 SBR の有限変形解析
坂口一彦先生 日本機械学会

論文では、有効断面 65mm となっていますが、試験機取付け状況から大きさとお有効断面を変更しています。

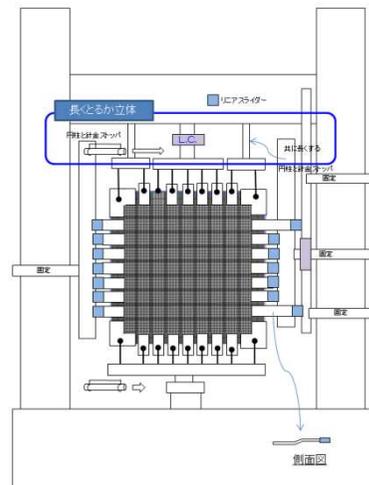
更に、先に説明しましたように解析でどの特性を予測するのか、二軸試験の項で説明しますが、予測の変形領域、何回目の特性か、それぞれ考えるべき点があります。



***** コーヒープレイク 簡易二軸試験機 (一軸拘束用) *****

二軸試験機政策は、非常に高価なため単軸試験機を工夫して、横方向の荷重をとるのにロードセル若しくはひずみゲージなどの工夫で対応することで、リニアスライダも小型化していますので費用を抑えての測定が可能になると考えています。

後述しますが、二軸均等試験も工夫することでできますが、最重要な領域である一軸拘束二軸伸張 (純せん断) 領域が簡単に測定できます。



⑥ 二軸試験から得られるデータ

主に一軸拘束二軸伸張領域で説明しますが、一軸伸張（単軸ではありません）、均等二軸試験でも共通領域は多いので、置き換えて考えてください。

Mooney 高次式 (JGS 式)

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \dots (3)$$

Ogden 式

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) \dots (4)$$

Mooney 高次式を I_1 、 I_2 で微分すると

$$\frac{\partial W(I_1, I_2)}{\partial I_1} = \frac{1}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left[\frac{\lambda_1^3 \sigma_1}{\lambda_1^2 - (\lambda_1 \lambda_2)^{-2}} - \frac{\lambda_2^3 \sigma_2}{\lambda_2^2 - (\lambda_1 \lambda_2)^{-2}} \right] \dots (5)$$

$$\frac{\partial W(I_1, I_2)}{\partial I_2} = \frac{1}{2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left[\frac{\lambda_1 \sigma_1}{\lambda_1^2 - (\lambda_1 \lambda_2)^{-2}} - \frac{\lambda_2 \sigma_2}{\lambda_2^2 - (\lambda_1 \lambda_2)^{-2}} \right] \dots (6)$$

伸張比から I_1 、 I_2 のテンソルへ
換算するとみ字グラフのような分布
になります。

ここまで概念的に説明してきましたが、
具体的な説明に入ります。

これらのデータを順番に処理することで
Mooney ならびに Ogden 係数が求め

られるのですが、残念ながら私にはソフトの中に組み込まれている便利な係数を算出する方法は理解できていません。二軸試験でも伸張側のみの試験から Mooney の高次の係数、次に表すものをどのように導くかは謎です。エネルギーの微分式 $\partial W / \partial I_i$ を定式のように如何に求めるか私には分かりません。(各ソフトで算出はたまに使います)

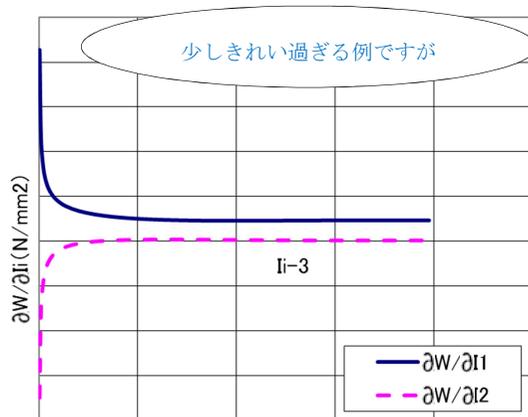
微分した式は、伸張比と応力で表現した (5) (6) の右辺と等価になりますので
EXCEL 等の回帰プログラムで係数を求められます。

$$\partial W / \partial I_1 = C_{10} + C_{11}(I_2 - 3) + 2C_{20}(I_1 - 3) + 3C_{30}(I_1 - 3)^2 \dots (3-1)$$

$$\partial W / \partial I_2 = C_{01} + C_{11}(I_1 - 3) \dots (3-2)$$

のように表現されます。また、ここで重要なのは、一軸拘束二軸伸張試験は

$I_1 = I_2$ となることです。このことを利用すると、



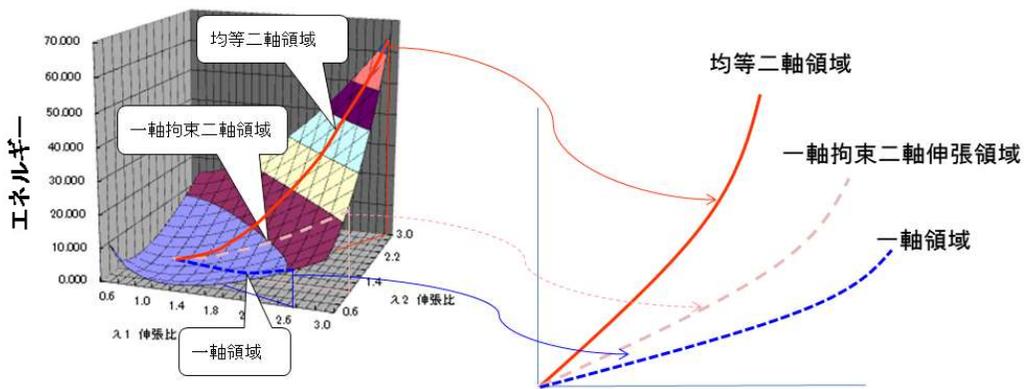
すべて I_1-3 の式で表現できます。(ここで EXCEL 等の回帰プログラムで係数)

$$\begin{aligned} \delta W / \delta I_1 &= C_{10} + [C_{11} + 2 C_{20}] (I_1-3) + 3 C_{30} (I_1-3)^2 \quad \dots (3-1') \\ \delta W / \delta I_2 &= C_{01} + C_{11} (I_1-3) \quad \dots (3-2') \end{aligned}$$

⑦ どのデータを収集、使用するか

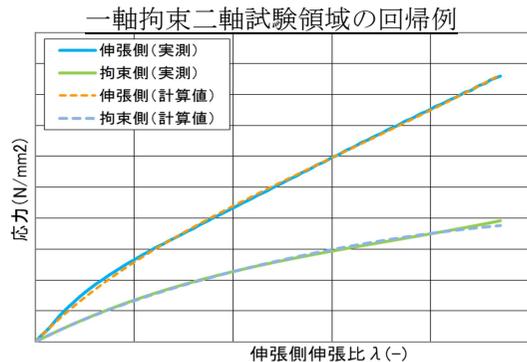
では、どのデータを使うと予測精度の良い解析ができるかという疑問が出ます。良く聞こえてきますが、‐一軸伸張、一軸拘束二軸伸張、均等二軸伸張の全データを使ってエネルギー回帰をすると予測精度が上がります。‐という回答をもらう方が多いようです。果たしてそうでしょうか。

Mooney 高次式、Ogden 式ですべての領域を精度よく回帰できるでしょうか。

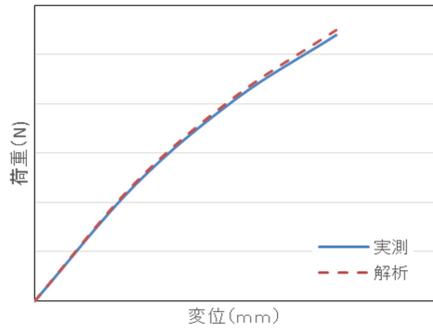
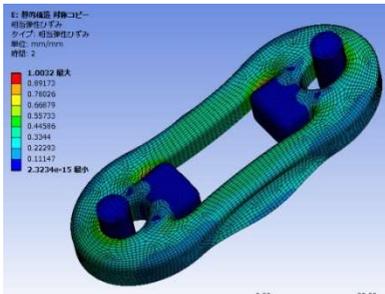


エネルギー密度関数を2方向の伸張比 λ_1 と λ_2 で立体的に表したグラフです。3つの代表的な二軸領域を、Mooney 高次式若しくは Ogden 式、他の表現式で全ての領域を精度よく表現できるでしょうか。

右グラフはある領域（一軸拘束二軸伸張領域）を回帰した例です。概ね全体の領域で一致しているように見えますが、初期のところでは差が大きいようにも見えます。様々な表現式がありますが、全ての領域を精度よく表現することが分かります。

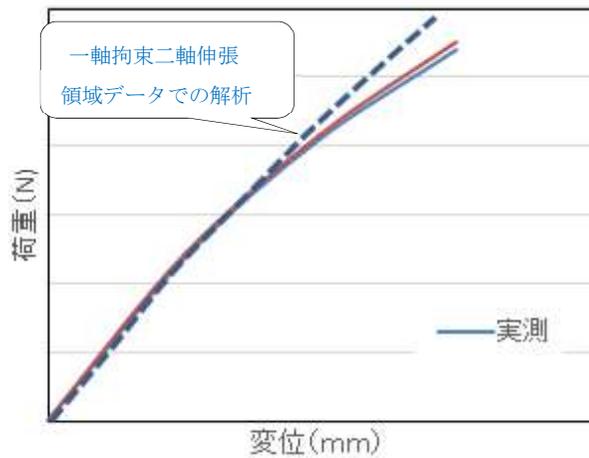


また、単軸領域の予測ですが、短軸（一軸）伸張からのデータで回帰すると、このような単軸伸張に近い製品は、短軸データで非常に精度よく予測できます。



しかし、先ほどの一軸拘束二軸伸張領域から得られたデータで回帰すると、右グラフのように、予測精度が悪化します。

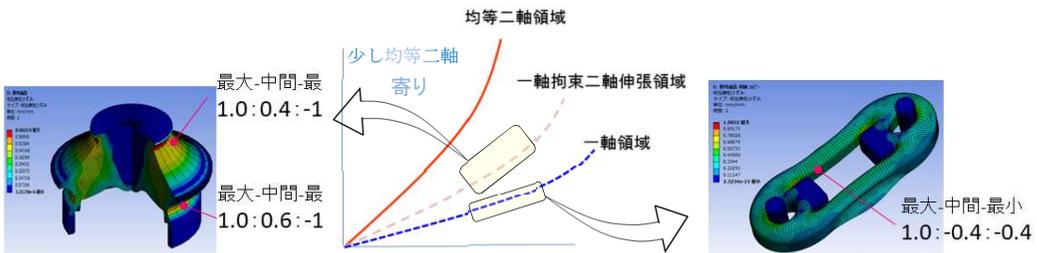
筆者がそこまでの手法を知らないのかもしれませんが、全ての領域を精度よく表現することは至難の業と感じています。



どの領域のデータを使うか、

それを考えると答えは明確で、

ターゲットになる製品の変形領域と合致した領域の二軸試験データを使うことが近道と考えます。それを前提に考えると、輪ゴムのような伸張であるマフラーマウントの解析は一軸、短冊のような単軸伸張でのデータ、エンジンマウントのような製品は一軸拘束二軸伸張試験からのデータを回帰係数での解析が合うと言えます。その理由として、代表的な位置の主ひずみを数値で表しましたが、ひずみの出方3方向の成分がそれぞれ、一軸拘束二軸伸張領域、一軸領域に近いからと言えます。(全体的成分に近い)



**** コーヒーブレイク：二軸試験機の正当性確認 *****:

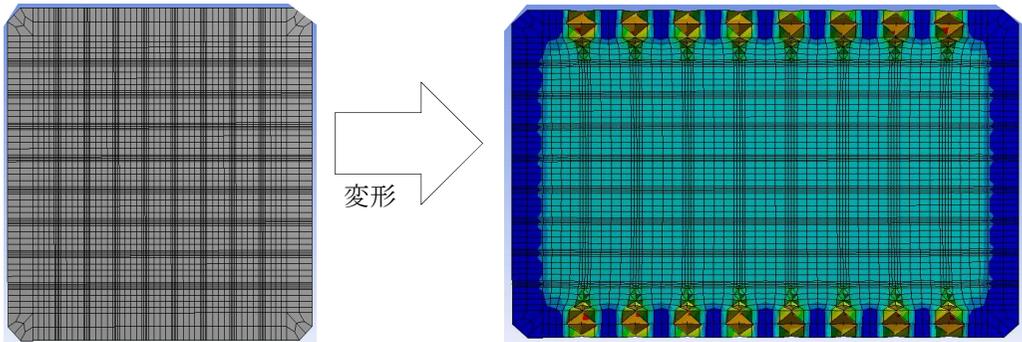
様々な試験機が考案されています。また、試験片も工夫されていますので利点欠点がそれぞれあると思います。先に説明しました、均一性、雑荷重を採取しないことなどを踏まえて検討していただければわかると思いますが、簡単に確認する方法を紹介します。有効断面もこの方法で確認できます。

方法としては、二軸試験そのものを解析してみれば一目瞭然です。

複雑なエネルギー関数を与えても同じですが、単純にするため、ネオフックの係数 **C10=1.0 (=ヤング率E/6)** での解析を行います。

結果、それぞれ有効となっているチャックの荷重を合算して、2軸方向の変位-荷重特性から有効断面に注意して、ひずみ-応力の特性にします。

この後に説明する方法で係数回帰を行い、**C10=1.0、C01~C30=0 (ゼロ)** となること確認できれば、その試験機が問題ないことの証明になります。



*****'

⑧ 実際の回帰例 一軸拘束二軸試験の実際・・・回帰まで

実際に具体的な例を使って、Mooney の 3 次係数を求めてみます。数値は、見え難いと思いますが、分かり易く手順を説明します。

Ogden については同様に EXCEL で回帰分析ができます。

[回帰手順] (へたりと初期荷重補正に注意)

i) 測定データの整理

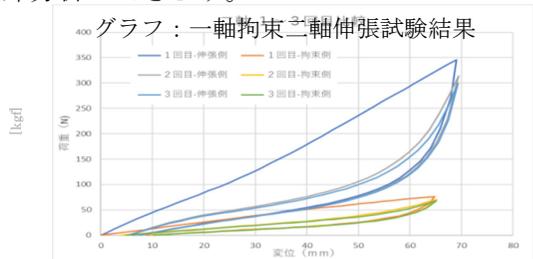
測定した変位と荷重から

伸張比 $\lambda = \text{変位}[\text{mm}]/100[\text{mm}]$

応力 $\sigma = \text{荷重}[\text{kgf}]/\text{有効断面積}$

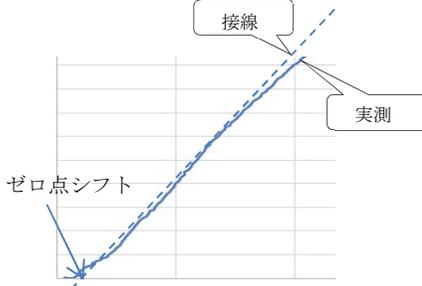
特に重要な点は、ここになります。“⑥二軸試験機から得られるデータ” で、説明しましたように試験機のへたりとずれの接線での補正は、基本の操作として必須になります。

二軸試験機からは、変位と荷重が測定で得られます。(古い試験機なので kg 系に注意)

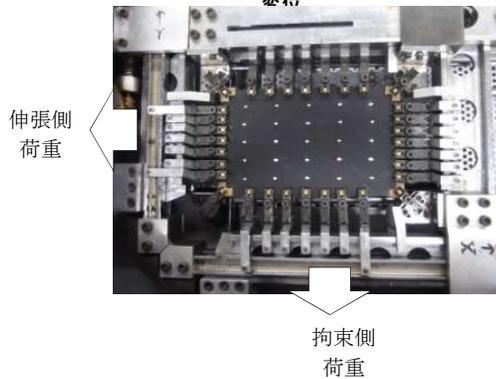
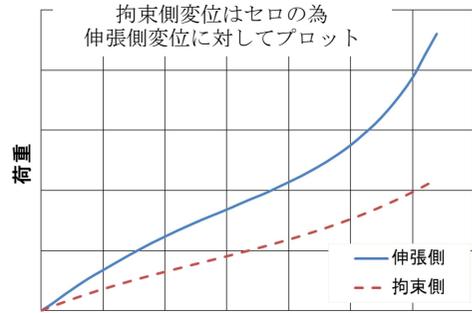


適正な処理をすると、右のような伸張側と拘束側の荷重が測定できます。

このとき、へたりや取り付け状態により変形初期から荷重を検知しない場合があります。また、下の図のようにまっすぐの線にならないことも単軸と同様に発生します。



接線を引いて、ゼロ点をシフトします。



伸張比λは、試験片の大きさ（富山試験機 120mm）に対して、チャック間距離(100mm)、すなわちゴムの自由表面の距離で割った値、荷重を有効断面で割った応力を使います。

$$\text{伸張比 } \lambda = \text{変位}[\text{mm}] / 100[\text{mm}] + 1$$

$$\text{応力 } \sigma = \text{荷重}[\text{kgf}] / \text{有効断面積}$$

[有効断面：62.5mm×厚さ 1~2mm]

※試験機 kgf ですので単位系にご注意下さい。

ただし、ゴムのへたりがありますので

元の長さ L_0 は、

$$100\text{mm} \Rightarrow 100\text{mm} + \text{へたり} \text{ として、}$$

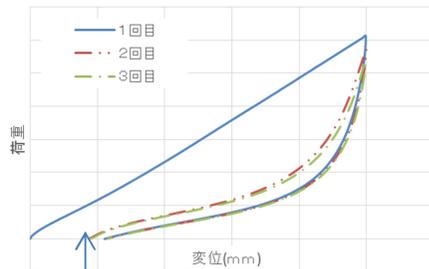
$$\text{伸張比 } \lambda = \text{変位}[\text{mm}] / (100[\text{mm}] + \text{へたり量}) + 1 \text{ とする必要があります。}$$

得られた変位と荷重を伸張比λと応力σの関係は、エネルギー密度 W の I_1 、 I_2 の偏微分した値で表すことができます。

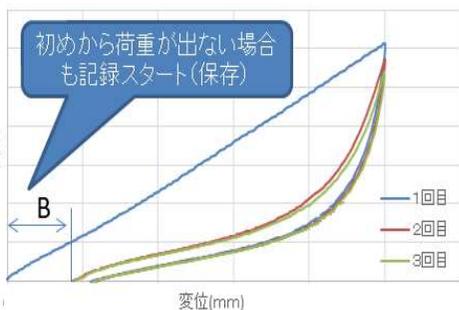
前ページの測定データを X、Y 方向それぞれ分離します。

3回目のデータを使う場合、2回目で B 点付近までエネルギーロスのカーブを描き戻ります。

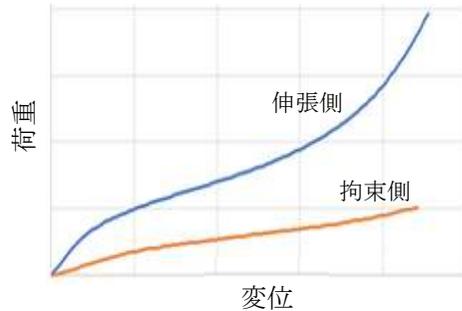
これを、X 及び Y 方向の荷重を



2回目、3回目開始位置



B分変位をゼロにシフトして、
 グラフを整えます。
 このとき、シフト量 B は X、Y
 方向で一致するとは限りません。



ii) 伸張比と応力の算出

応力と伸張比を次の式で変換します。

伸張比 : $\lambda_1 = \text{変位} / (100 + B)$

応力 : $\sigma_1 = \text{荷重} / \text{有効断面積}$

有効断面積 = 試験片厚み × 62.5mm (二軸試験機のページで説明)

得られた伸張比と応力からエネルギー密度 W の I1、I2 での偏微分との

関係
$$\frac{\partial W(I_1, I_2)}{\partial I_1} = \frac{1}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left[\frac{\lambda_1^3 \sigma_1}{\lambda_1^2 - (\lambda_1 \lambda_2)^{-2}} - \frac{\lambda_2^3 \sigma_2}{\lambda_2^2 - (\lambda_1 \lambda_2)^{-2}} \right] \dots (5)$$

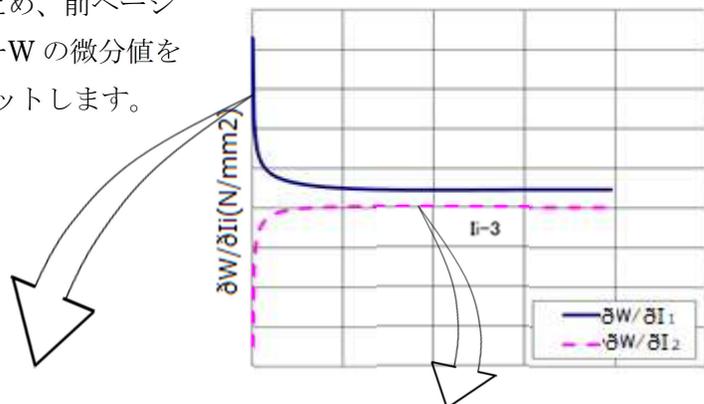
$$\frac{\partial W(I_1, I_2)}{\partial I_2} = \frac{1}{2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left[\frac{\lambda_1 \sigma_1}{\lambda_1^2 - (\lambda_1 \lambda_2)^{-2}} - \frac{\lambda_2 \sigma_2}{\lambda_2^2 - (\lambda_1 \lambda_2)^{-2}} \right] \dots (6)$$

得られた応力と伸張比を入力して $\partial W / \partial I_1$ と、 $\partial W / \partial I_2$ を EXCEL で計算します。

No.	λ_1	λ_2	I1-3	-3	σ_1	σ_2	dW/dI1 #DIV/0!	dW/dI2 #DIV/0!
1	1.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000		
		1.00000	0.00040	0.00040	0.13067	0.06533	1.65371	0.00408
伸張比 λ_1	1.00000	1.00000	0.00157	0.00157	0.20133	0.15067	1.67400	0.00816
		1.00000	0.00350	0.00350	0.19600	0.19600	1.69421	0.01224
		1.00000	0.00616	0.00616	0.26133	0.19600	1.71433	0.01631
		1.00000	0.00953	0.00953	0.32667	0.19600	1.73436	0.02038
		1.00000	0.01360	0.01360	0.39200	0.19600	1.75430	0.02444
		1.00000	0.01834	0.01834	0.9	0.19600	1.77415	0.02849
		1.00000	0.02374	0.02374	1.0	0.19600	1.79391	0.03252
		1.00000	0.02978	0.02978	1.1	0.19600	1.81358	0.03655
		1.00000	0.03645	0.03645	1.30000	0.19600	1.83315	0.04056
		1.00000	0.04372	0.04372	1.43733	0.19600	1.85262	0.04455
		1.00000	0.05159	0.05159	1.56800	0.19600	1.87200	0.04853
		1.00000	0.06005	0.06005	1.69867	0.19600	1.89128	0.05249
		1.00000	0.06907	0.06907	1.82933	0.19600	1.91047	0.05644
		1.00000	0.07864	0.07864	1.96000	0.19600	1.92955	0.06036
		1.00000	0.08876	0.08876	2.09067	1.04533	1.94854	0.06427
		1.00000	0.09941	0.09941	2.22133	1.11067	1.96742	0.06815
		1.00000	0.11058	0.11058	2.35200	1.17600	1.98620	0.07201

iii) 回帰から C10~C30 係数を求める

ここで便宜的に拘束側 $\lambda_2 = 1.0$ として、(一軸拘束二軸伸張の場合) $I_1 = I_2$ の関係式が成り立つため、前ページで計算したエネルギー W の微分値を I1 3 に対してプロットします。



$\partial W/\partial I_1$

6W/ 6I ₁	I ₁ -3	(I ₁ -3) ²
#DIV/0!	0.00000	0.00000
225.69009	0.00004	0.00000
123.35723	0.00016	0.00000
73.61237	0.00043	0.00000
56.61478	0.00107	0.00000
47.80671	0.00187	0.00000
37.69715	0.00289	0.00001
29.30937	0.00403	0.00002
23.14354	0.00528	0.00003
18.12600	0.00678	0.00005
14.81755	0.00835	0.00007
12.12732	0.01019	0.00010
10.11440	0.01220	0.00015
8.76676	0.01426	0.00020
7.66377	0.01660	0.00028
6.83769	0.01911	0.00037
6.26543	0.02163	0.00047
5.69324	0.02446	0.00060
5.18752	0.02769	0.00077
4.86023	0.03060	0.00094
4.57363	0.03351	0.00112
4.25418	0.03716	0.00138

$\partial W/\partial I_2$

6W/ 6I ₂	I ₁ -3
#DIV/0!	0.00000
-219.80030	0.00004
-117.51180	0.00016
-67.90470	0.00043
-50.75071	0.00107
-41.87939	0.00187
-31.94799	0.00289
-23.84635	0.00403
-17.96858	0.00528
-13.24952	0.00678
-10.17862	0.00835
-7.71964	0.01019
-5.91153	0.01220
-4.72441	0.01426
-3.77333	0.01660
-3.07936	0.01911
-2.61355	0.02163
-2.15648	0.02446
-1.76545	0.02769
-1.52399	0.03060
-1.31764	0.03351
-1.09304	0.03716
-0.89587	0.04127
-0.78990	0.04460
-0.67418	0.04820

すべて I₁-3 の式で表現できます。

(ここで EXCEL 等の回帰プログラムで係数)

$$\partial W/\partial I_1 = C_{10} + [C_{11} + 2C_{20}] (I_1-3) + 3C_{30}(I_1-3)^2 \dots (3-1)$$

$$\partial W/\partial I_2 = C_{01} + C_{11}(I_1-3) \dots (3-2)$$

と等価になりますので、重回帰分析を行うと

$$\partial W/\partial I_1 = C_{10} + [C_{11} + 2C_{20}] (I_1-3) + 3C_{30}(I_1-3)^2 \dots (3-1)$$

6W/ 6I ₁	I ₁ -3	(I ₁ -3) ²
#DIV/0!	0.00000	0.00000
225.69009	0.00004	0.00000
123.35723	0.00016	0.00000
73.61237	0.00043	0.00000
56.61478	0.00107	0.00000
47.80671	0.00187	0.00000
37.69715	0.00289	0.00001
29.30937	0.00403	0.00002
23.14354	0.00528	0.00003
18.12600	0.00678	0.00005
14.81755	0.00835	0.00007
12.12732	0.01019	0.00010

から、切片 C₁₀

一次係数 C₁₁ + 2C₂₀

二次係数 3C₃₀

が求められます。

$$\partial W/\partial I_2 = C_{01} + C_{11}(I_1-3) \dots (3-2)$$

6W/ 6I ₂	I ₁ -3
#DIV/0!	0.00000
-219.80030	0.00004
-117.51180	0.00016
-67.90470	0.00043
-50.75071	0.00107
-41.87939	0.00187
-31.94799	0.00289
-23.84635	0.00403
-17.96858	0.00528
-13.24952	0.00678
-10.17862	0.00835
-7.71964	0.01019

ここから

切片 C₀₁ と 傾き C₁₁ が求められます。

上記の 一次係数 C₁₁ + 2C₂₀ から、この C₁₁ を引き、2 で割ると C₂₀ が、

また、二次係数 3C₃₀ を3で割ると C₃₀ が、

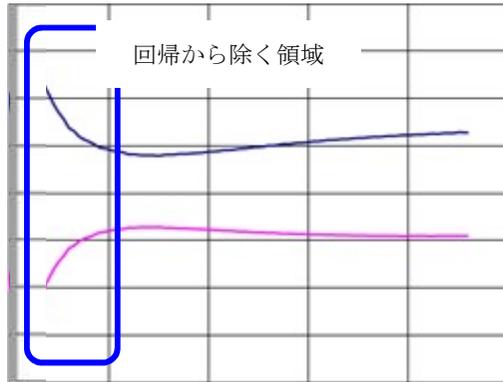
求められ、すべての係数が決まります。

ここで回帰の大きなポイントですが、エネルギーWを1階微分すると

I1は二次式、I2は一次式と

なりそれほど複雑なプロットを
表せないということです。

つまり、回帰で表現できない領域
微小荷重の領域で変化が大きい為
除いて回帰することです。

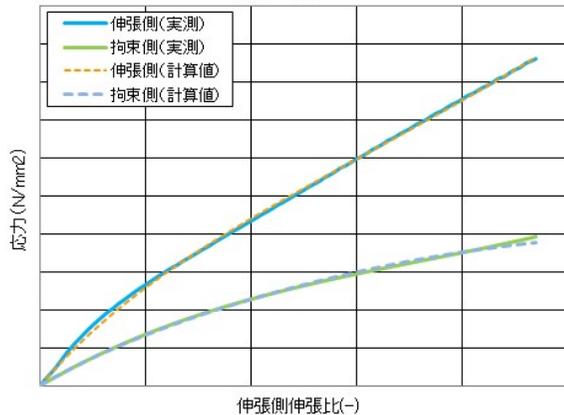


iv) 結果確認

(5) (6) の式から、 σ_1 と σ_2 の実測と計算値を比較する。

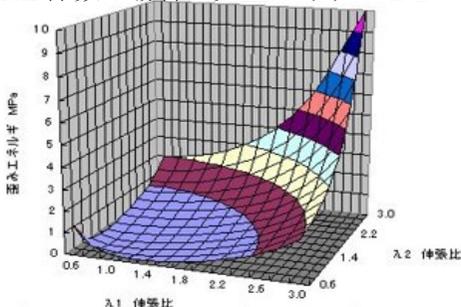
このグラフのように、精度よく
回帰できる。

ゴムの特性であれば、実測と
回帰計算値が大きくずれる
ことはありません。

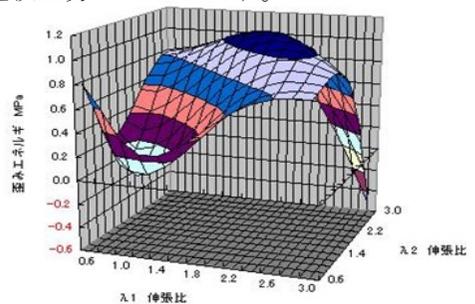


v) エネルギー分布を確認する。

最後に必ず、エネルギー分布を確認することです。エネルギー式 W を Excel
で計算式を作成、 λ_1 、 λ_2 に対する分布を下図のようにみると、伸張比が大きくなるにつれてエネルギーが大きくなり、時に悪いデータで顕著なものは、伸張比が大きくなるのにエネルギーが落ち込む、小さくなる下図のようなおかしい分布にならないことを確認する必要があります。Mooney 係数ではあまり起こらないのですが、Ogden 係数の場合に発生しやすいことが経験上分かっています。



正しいエネルギー分布グラフ



顕著におかしいエネルギー分布グラフ

伸張比が大きくなるにつれて、エネルギーも大きくなるはずですが、逆に落ち込むエネルギー傾向を示すことは少なくありません。

3) エネルギー関数と特性線図の関係

①Mooney 式での応力

$$\text{一般式 } W = \sum_{i=0} \sum_{j=0} C_{ij} (I_1-3)^i (I_2-3)^j$$

$$\text{i) 一軸拘束二軸伸張試験} \quad \sigma_1 = \frac{2}{\lambda_1} \left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_2^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right]$$

$$\sigma_2 = \frac{2}{\lambda_2} \left(\lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_1^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right]$$

$$\text{ii) 均等二軸伸張試験} \quad \sigma = 2 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right]$$

$$\text{iii) 単軸試験} \quad \sigma = 2 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial W}{\partial I_2} \right]$$

②Ogden 式での応力

$$\text{i) 一軸拘束二軸伸張試験} \quad \sigma_1 = \sum_{n=1}^N \mu_n (\lambda_n^{\alpha_n-1} - \lambda_n^{-\alpha_n-1})$$

$$\sigma_2 = \sum_{n=1}^N \mu_n (\lambda^{-1} - \lambda^{-\alpha_n-1})$$

$$\text{ii) 均等二軸伸張試験} \quad \sigma = \sum_{n=1}^N \mu_n (\lambda^{\alpha_n-1} - \lambda^{-2\alpha_n-1})$$

$$\text{iii) 単軸試験} \quad \sigma = \sum_{n=1}^N \mu_n (\lambda^{\alpha_n-1} - \lambda^{-0.5\alpha_n-1})$$

4) 回帰係数とヤング率の関係

$$E = 6(C_{10} + C_{01}) = (3/2) \sum \alpha_i \mu_i$$

5) そのほかのエネルギー表現の工夫

Mooney さん、Ogden さん、アルーダさんやボイスさんが考案された式ですが、様々な理論式が考えられています。日本でも川端先生をはじめいろいろな式が提案されています。文献まで探し出せず、メモとしてノートの記録ですので、また、既に説明しましたように基になるデータに解析精度は依存し、表現式はその元のデータをどれだけ忠実に票田表現できるかですので、文献名、ご容赦下さい。それぞれ提案された式は、

$$\text{川端先生/京都大} \quad \partial W/\partial I_1 = C_1 + C_2(I_1-3)^N \quad \partial W/\partial I_2 = C_3 - C_4(I_1-3)^N$$

尾畑さん/旧日本合成ゴム
(現 JSR)

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{\mu^i}{\alpha^i} (\lambda_1^{\alpha^i} + \lambda_2^{\alpha^i} + \lambda_3^{\alpha^i} - 3)$$

ここで $\alpha = 1, 2, 1/3$ としています。

川端先生と山下先生/元滋賀県立大 (現大阪成蹊女子大)

$$W = C_{10}(I_1-3) + C_{01}(I_2-3) + \frac{C_{n0}}{n+1} (I_1-3)^{n+1}$$

**** コーヒーブレイク：エネルギー関数、二軸試験私の関わり合い *****:

1991年1月FEM解析の社内立ち上げで新部門の発足に参加しました。当時は、私と部門長であるボスと別の商品開発に携わる1名、計3名で研究室でした。ゴムの解析を行うにあたり、ゴム材料の解析用

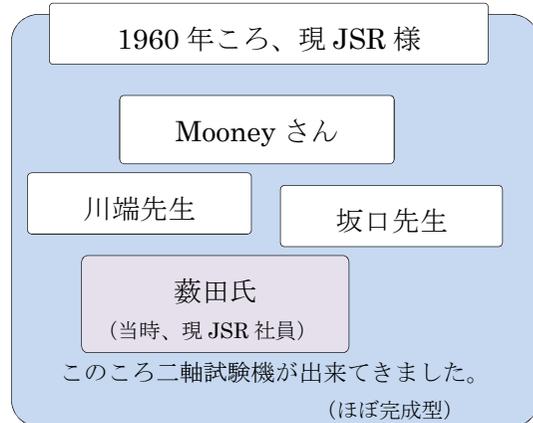
材料定義が必要ということで、顧問であった藪田氏(旧日本合成ゴム出身)の紹介で同志社大学坂口彦教授にお会いしました。夏の暑い日、にしんそばとビールで帰り道に昼食でした。

そのとき初代の社長でしたが、高価な約1億のシステム円を預けて頂きました。上司が社長から信頼を得ていたことと

社長自身の人を大事に、お客様、従業員を大事にする堅実な経営でバブル崩壊も影響もなかったことも大きな要因と、皆様にはお世話になりました。本年(2018年7月23日)

坂口先生は他界されましたが、1週間日曜に京都入りして土曜まで今出川校の地下にこもり、夜たまに祇園でのお食事にご一緒させていただくなど思い出がいっぱいです。

3年前、長男が同志社大学へ進学、ご報告に伺い喜んでいただきました。



6) 各定義式の優位性

同じデータからは、アルーダ・ボイス式含めて、そのデータに応じた精度のデータベースが出来上がります。解析する製品のひずみ領域のデータを集めることで、その製品を精度よく解析できることを説明しました。

また、定義式は異なっても同じデータから表現した係数は、同等の精度であることも説明しましたが、ここで、それぞれの表現式の優劣について説明します。

Mooney 高次式、Ogden 式にしても式の意味合いから3次などになるとエネルギーの確認の項で説明しました、悪い例、エネルギーの落ち込みが発生することになりますので注意していただきたいのですが、Ogden 式はコントロールが難しく厄介です。

・ Mooney 高次式の利点、欠点

利点) 係数の傾向があるため、3~5 Hs おきの測定で系統的な材料定義が可能。

係数による傾向をコントロールすることが可能です。例えば、 C_{11} は中間的な座屈特性の表現に有効で、 C_{20} や C_{30} はゴムの立ち上がり表現に役立ちます。

欠点) 複雑な挙動は、回帰することが難しい場合もあります。

・ Ogden 式の利点、欠点

利点) 複雑な表現が可能で、ゴムの挙動から離れたようなものも表現できることも多いです。

欠点) エネルギー関数が不安定になり、確認した時に落ち込みとなる場合も発生しやすくなります。また、Excel 等でマクロなどを組まないと、直接の回帰が難しく、熟練を必要とします。

いずれもソフトに備わった回帰を使うと、手品のように簡単に係数が求められますが、必ずエネルギーを確認する必要があります。ただし、一軸拘束二軸伸張試験、一軸試験（短冊の単軸試験と異なります）の2方向の応力とひずみの関係は必要なく、1方向の関係式から求められることは不思議です。

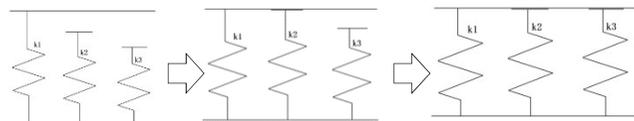
***** コーヒープレイク ゴムの非線形性の利点*****

右に示すような特性は、金属ばねを使うといくつもの組み合わせになり、順番に機能するような構造とすることが必要になります。しかし、ゴム製品ですとこの非線形性も

1 製品で表現できます。さらには、金属ばねですと○部のような変曲点をなだらかに

定義することが難しく、

ここは乗り心地に影響します。



7) 二軸試験ができないとき

このエネルギーを定義したいのに、二軸試験ができるとは限りません。その時はどうしたら良いか、メカニカルデザイン社のテクニカルペーパーに記されています。

一軸試験による二軸伸長ゴム材料モデルの推定 Estimation of Biaxial Extension Curve from Uniaxial measurement of Rubber Materials ○永田 孝弘, 正 小林 卓哉

(メカニカル・デザイン・アンド・アナリシス) 山下 義裕 (滋賀県立大工)

単軸試験の結果に対して、均等二軸試験、一軸拘束二軸伸張試験の線図から倍率をかけて予測できると書かれています。先に述べましたように、材料の特徴から初期特性が一致しても全体特性が一致しない、また、製品の変形領域にあった領域の材料試験を行うなど、注意すべき点はありますが、全くデータがなく手掛かりが必要なときはこの方法を利用することも一つと考えています。

また、寺子屋ホームページから一般的な二軸エネルギー定義 (Mooney 高次係数) を無償提供させていただいております。[ゴムの解析 寺子屋 2018 で検索可能です]

(1) 川端季雄, 実在ゴムの弾性, 日本レオロジー学会誌Vol1 2, (1984), p 69-77. (2) 山下義裕, 川端季雄, 補強ゴムのひずみエネルギー密度関数の近似式, 日本ゴム協会誌, 65, (1992), p 517-528

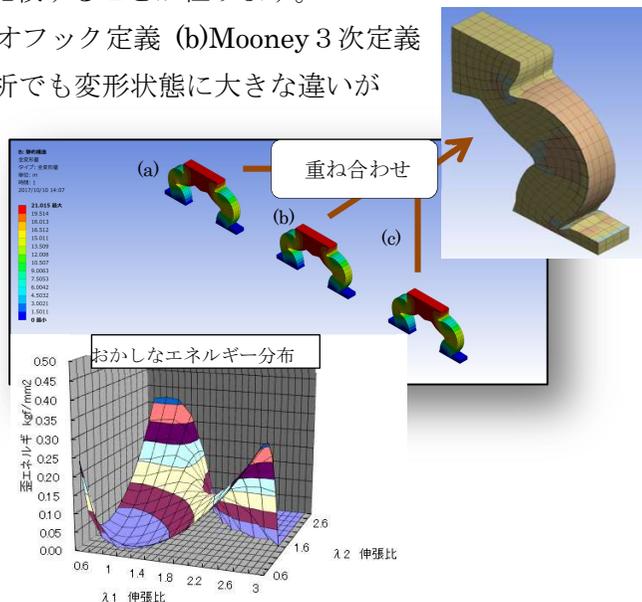
*****コーヒープレク ゴムの変形は良く合う変形合う、だから勘違いします *****

ゴムの解析を行い検証するときに、良く用いられる手法としてゴム表面にマス目を引いて、写真(動が)で測定して解析結果と比較することが在ります。

しかし、右に材料をそれぞれ(a)ネオフック定義 (b)Mooney 3次定義 (c)おかしなエネルギー関数での解析でも変形状態に大きな違いがないことが多いです。

これはゴムの非圧縮性 (ポアソン比) の手品のようなもので、変形が合っているからと材料定義も合っていると勘違いしやすい例になります。

つまり、材料定義はいい加減でもゴムの変形予測はできるといことになります。



5 ゴムの物理的材料定義について -Part 2-

ひずみエネルギー密度関数での定義について説明してきましたが、二軸試験機が簡単に使える環境にある方は少ないと思います。では、その中で可能な限り精度をあげて、予測精度を満足のいくレベルにするにはどうしたら良いか説明します。

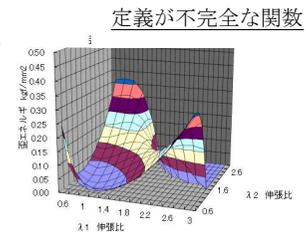
1) ネオフック式での精度

先に最も簡単なひずみエネルギー密度関数としてのネオフック表現でどこまで解析出るか、ということですが慣れないエネルギー関数を定義して、大変形領域でエネルギーの落ち込みが発生するようなおかしな定義するよりははるかに安全で、有効に定義できます。先に表現しましたように、

$$\text{ネオフック式 } W=C_{10} (I_1-3) \dots (1)$$

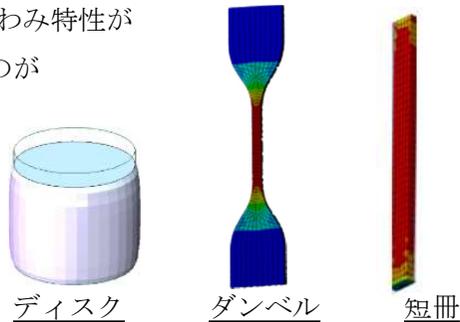
となりますが、ヤング率、せん断弾性率との関係は

$$\begin{aligned} \text{ヤング率 } E &= \text{せん断弾性率 } G \times 3 \\ &= 6 C_{10} \text{ となります。} \end{aligned}$$



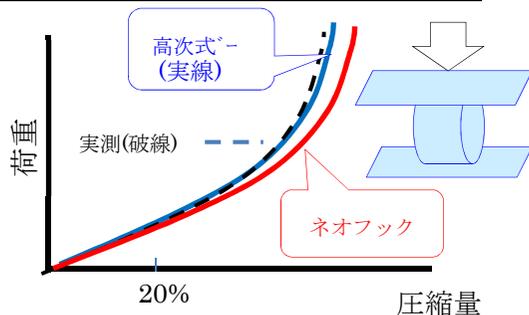
ゴム屋さんで簡単に手に入り荷重-たわみ特性が求められるものとして、代表的なものがディスク、ダンベル、短冊があります。

直接、ゴムの製造に携わっていない方は、これらの試験も難しいと思われませんが、注意点を踏まえてメーカーさんにお問い合わせする方法もあるかと思います。



ネオフック式の精度を確認するために、Mooney 高次式と実測の比較を行うと、20~30% くらいまでの特性予測では、良く合うと思われる結果で、尚且つ必ずネオフック式予測は、実測より小さい荷重となることが明らかです。

ディスク半径方向圧縮荷重 vs たわみ特性



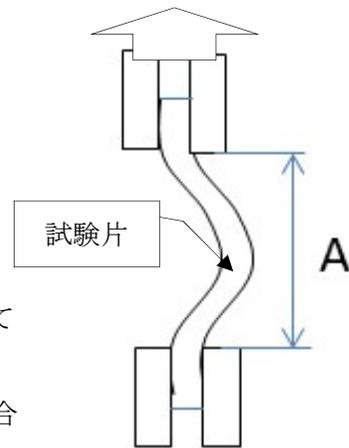
単純な試験からヤング率を求められ、そこからネオフック式の係数 C10 を簡単に定義でき失敗しにくい関数としては、有効活用可能かと考えています。

しかしながら、短軸試験やディスクの圧縮試験にも落とし穴があります。
その注意点を順に説明します。

2) ネオフック式の係数 C10 定義について

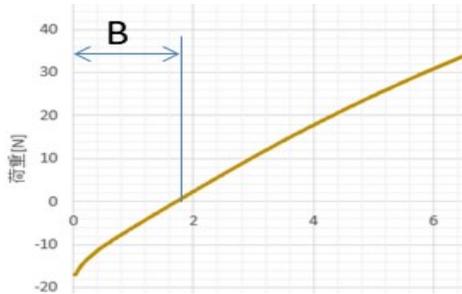
① 基本的な共通課題：ゼロ点はどこですか？

ゴムの1回目、2回目、3回目の特性の違いについて二軸の項で説明しましたが、これは短軸でも同様に考えるべき課題です。更に、二軸のところでは簡単にへたり、荷重がゼロに戻らないことを簡単に流しましたが、ここで明確に触れておきます。それはゼロ点が明確に計測されないことです。この処理を誤ると、正確なヤング率が求められないことになります。右図のように試験片の伸張試験を行う場合ゼロ点が簡単に定まらないことが在ります。

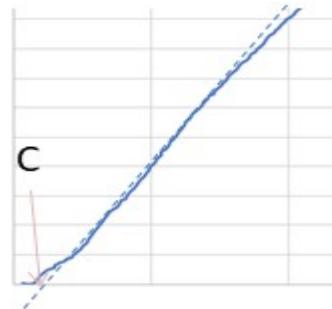


まず、試験機のチャックで挟むと、必ずと言っていいくらいに右図のようなたるみが発生します。そのたるみは 下図の a)逆方向の荷重がでる場合 b)初期の荷重が安定しない、という現象に現れます。

a)たるみによる反対（圧縮）側荷重検出



b)初期に荷重が安定しない



これらはゼロ点を適正処理する必要があります。

また、ヤング率 $E = \sigma$ (応力) / ϵ (ひずみ) として定義される剛性も、この時の初期長さ L_0 が正確に定義できないと、上記の図の $A = L_0$ となりますが、実際は

$$\epsilon = \text{変位} / (L_0 + B) \quad \text{若しくは } B \text{ のかわりに } C \text{ を代入して}$$

ひずみを求める必要が在ります。

② ヤング率 $E = \text{応力 } \sigma / \text{ひずみ}$ の式は正しいか

真応力、真ひずみの議論はありますが、果たして解析をする場合の材料を正確に定義できていますか？ ヤング率 $E = \sigma / \epsilon$ はどんな試験でも正しいのでしょうか。それは NO です。

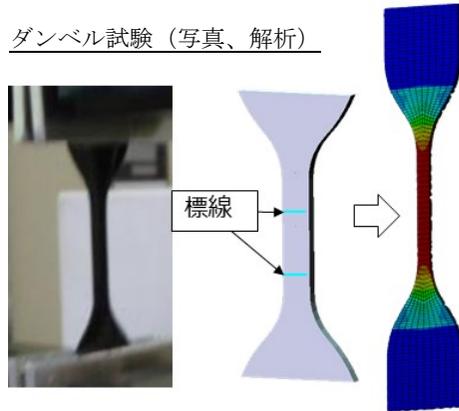
まず、ゴムの引張試験は一般的に3号ダンベルで行うことが多いように見受けられます。また、ダンベルを扱う場合、中心の20mm幅に標線という線をひき、その間の変位に対する荷重を測定する場合があります。

実際に品質管理での破断伸び、強度の測定は標線間伸びで管理することが多いようです。

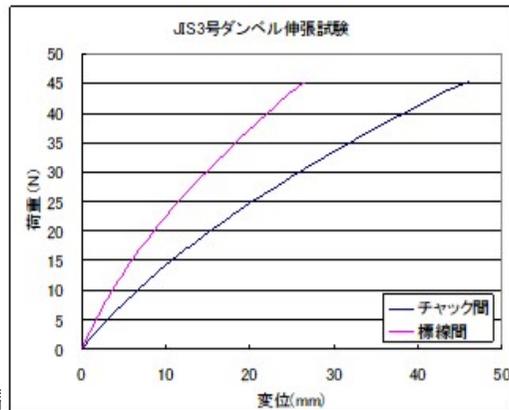
しかし、それでよいのでしょうか。単に伸びを見るのではなく、その時の反力との関係で剛性を定義しなければならないのですが、乱暴な意見として、“チャック間と標線間の荷重は釣り合っている限り等価でしょう”という人もいます。

これが間違いのもとです。それらを順番に解説します。

ダンベル試験 (写真、解析)



3号ダンベルのチャック間、標線間での変位-反力



まずはグラフに、

- i) チャック間変位 vs 荷重
- ii) 標線間変位 vs 荷重 を表しますが、明らかに異なります。当たり前で、分解して見ていく必要があります。

チャック間を 50mm とし、標線間

チャック間の荷重は標線間の荷重と同じ (イコール) という意見ありますので、その点を検証してみます。

ダンベルをばねに置き換えてみるとこれらの疑問が解決します。

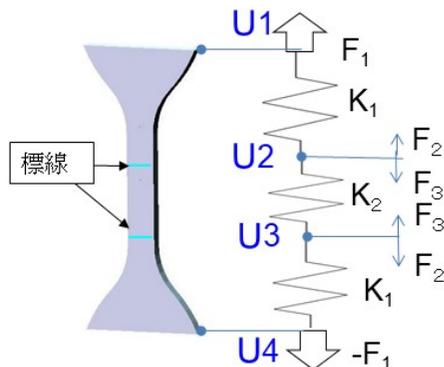
模式的に標線で分解します。

チャック間の変位を U_1 と反対方向 $U_4 (=0)$ とし、標線の変位を U_2 と U_3 と定義します。

反力は、 U_1 の位置が F_1

U_4 の位置が $-F_1$

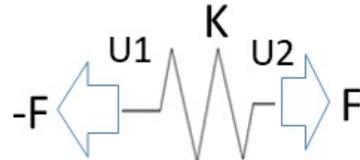
ばねは明らかに剛性の違いが分かり



上から K_1 、 K_2 、 K_1 となります
 標線位置での力を、便宜上 F_2 、 F_3 とします。
 これまでの“釣り合っている・・・”ということが証明される場合、 $f_1=F_2=F_3$ となれば、その意見が正しいこととなります。つまり、ダンベルでの測定は
 チャック間でも標線間でもどちらの測定でも良いということになります。

ここでばね表現について触れておきます。
 私自身、化学専攻だったためこの表現を見たのは社会人、この FEM という仕事に携わって初めてみました。

1本のばねの釣り合いを次のように表現します。解説は割愛します、というより本に書かれている以上に説明できませんので、そちらを参照ください。



1本のばねの模式図

↓マトリックス表現

$$\begin{pmatrix} F \\ -F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & -K \\ -K & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

では、ダンベルに戻りますが、ばねが複雑になりますから次のようにします。

$$K_1 > K_2 \text{ なので、} K_2 \text{ の何倍かが } K_1 \text{ のため、} K_1 = n K_2 \Leftrightarrow K_2 = K_1 / n$$

ばね計算は右のようになりますが、ゴムのばねの非線形性から、 n が一定の数値でないため、 F_2 と F_3 は、同じでないことは当然として一定のばね比にならないため、

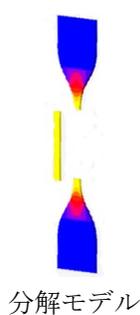
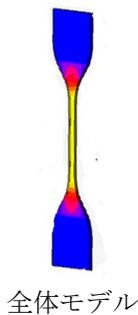
$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ -F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & -k & 0 & 0 \\ -K & K+K/n & -K/n & 0 \\ 0 & -K/n & -K/n+K & -K \\ 0 & 0 & -K & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

$F_2 \neq F_3$ となり、

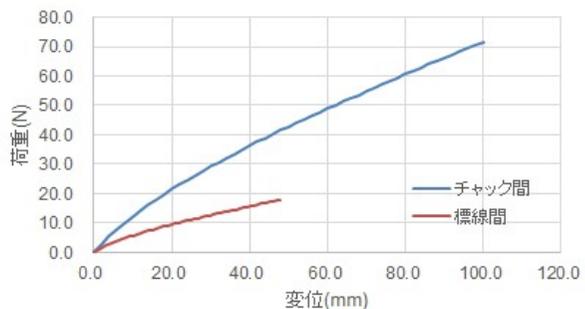
チャック間力と標線間の力は同じではなく、また、標線間の荷重は不明なままになります。

よって、標線間の伸びと荷重でひずみと応力に換算することができません。

別の見方として、十分な精度の解析であれば実測を表現できます。標線間の反力は全体モデルを解析しても、力が得られないため、分解したモデルにあらかじめ求めた変位を標線位置に与えて解析を行うとその差は明白です。



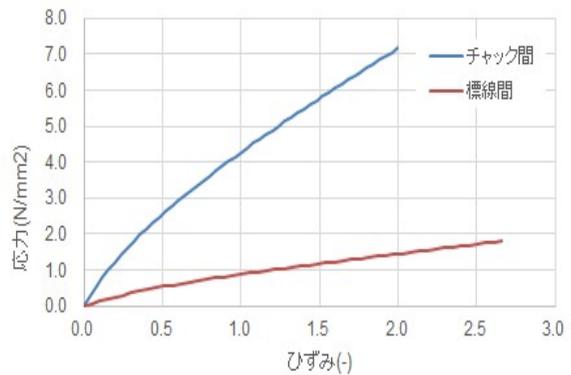
チャック間と標線間の変位 vs 荷重特性



ただし変位は標線間が半分程度で剛性が小さいので変位は3分の2程度と大きくなり、ひずみと応力に換算すると、より差が顕著になります。

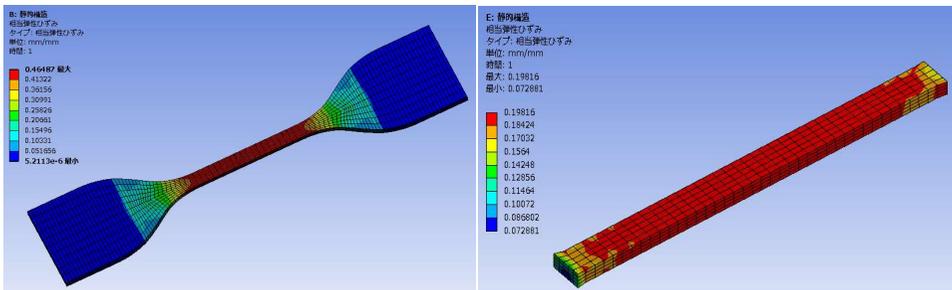
つまり、標線間とチャック間のひずみと応力の関係は等価ではなく、チャック間の力を標線間の力と考えることはできなく、等価ではないことが解析からも明らかになります。

↓ ひずみ vs 応力へ変換

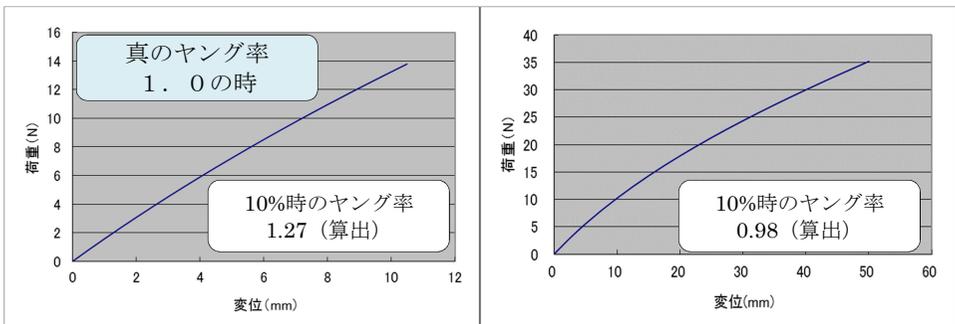


③ ダンベルと短冊の違い

では、ダンベル短冊から得られるデータがどのようなものか見ていきましょう。ダンベル、短冊の変形概要は次のようになります。



その時の荷重-たわわ特性を示します。共に断面積は同じため、直接の比較がひずみ-応力の比較とも取れます。(チャック間距離を同じにするとひずみも同じ) ここから 10%時の応力をひずみで割った値、すなわち 10%変形時のヤング率は (ヤング率 1.0 の材料での解析、実測共に)、算出されるヤング率は、ダンベルが 1.27N/mm²、短冊が 0.98N/mm² となり、1.0 になりません。



この結果からダンベル、短冊共に測定から得られたヤング率をそのまま使うこと

ができないことが分かります。とは言え、短冊での試験結果（ヤング率）を 0.98 で割った値を使うことが近道と考えます。

変形もダンベルのように中央のみ伸びが卓越してエイルより、均一に伸張される短冊のほうがいろいろな面で問題なく使えると考えていますし、長年この方法で問題なく過ごしてきました。

*****コーヒープレク：材料データの平均ということの弊害 ****

笑い話のようなことですが、

こんな経験があります。

右は、同じシートから切り出した、ほぼ同じ形状から採取した変位・荷重の測定結果ですが、さてどう考えるでしょう。

ある者は 1) 平均して使いました。

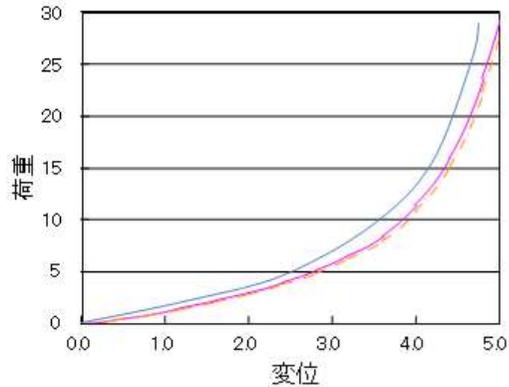
2) 2本の一致したデータの平均

3) 全て取り直し。

当たり前のように、取り直しです。

同じシートから採取したデータがこうなったら全てが信用できません。

なぜ、ありえないデータを排除せずに平均することを考えるのか分かりません。

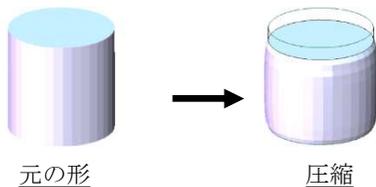


④ 短冊以外での測定：伸張測定ではなくディスクの圧縮測定ではでは、伸張試験以外に材料、ヤング率からネオフック式の C10 を定義できるのか考えます。前提条件として、実測＝解析になりますので、ヤング率 1.0N/mm² の材料の解析で解説します。

また、ディスクの検証は摩擦の問題があると複雑になりますので、ディスク形状を上下金具接着タイプとします。

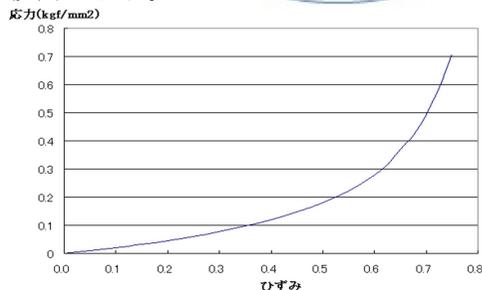
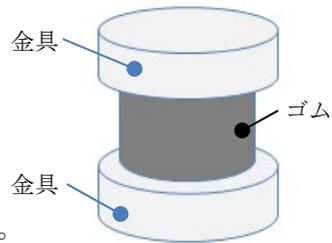
はじめに 直径 18mm 高さ 26mm

のディスクで検討します。

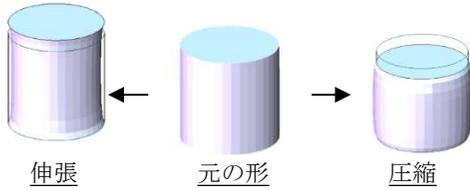


短冊と同様に、10%変形時の応力からヤング率を求めると、

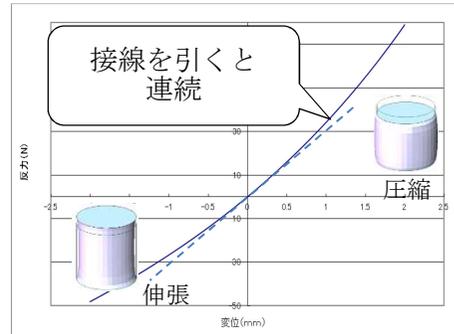
剛性 1.0N/mm² の材料であるにも関わらず 結果は 0.79N/mm² となります。



なぜ、真の剛性（ヤング率）である 1.0N/mm^2 が求められないのでしょうか。
やはり圧縮では、真の剛性が求められないのでしょうか。



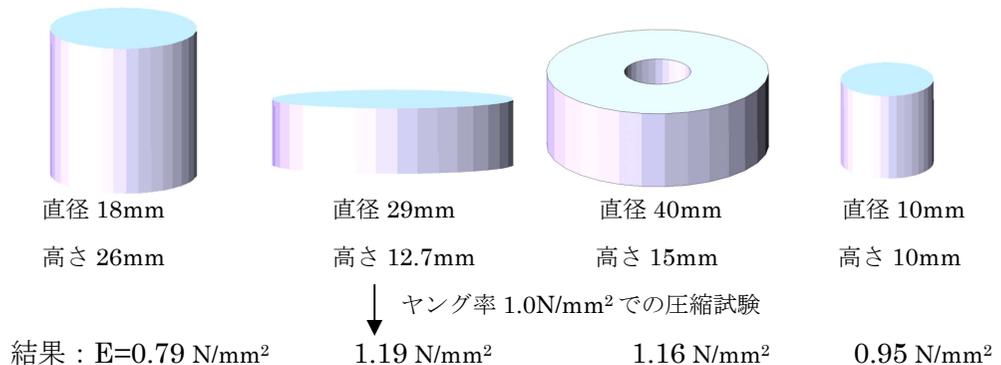
伸張側を確認しても、ゼロ変形付近は連続性があり、圧縮と引っ張りの問題でないと考えられます。



なぜか、その答えは後に説明します。もう少し、別のディスク形状で見ていきます。

⑤ 真のヤング率を求めるには

ゴム屋さんで見渡すと、次のような形状のディスクが入手できます。
形状、硬さ様々ですが同様に剛性として、ヤング率 1.0N/mm^2 でこれらを製造します。（上下、金属板と接着したものとして）
それぞれ圧縮試験を行い 10%圧縮時のヤング率を求めると、それぞれの形状毎に得られた応力をひずみで割る、結果としてそれぞれの結果になります。



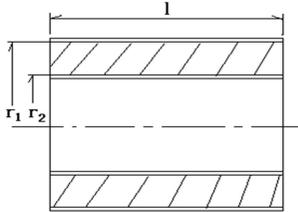
なぜ、真のヤング率が 1.0 N/mm^2 なのにまちまちの剛性が出るのか、それは形状が関係しているからです。形状率という言葉で、防振ゴムの設計法に書かれています。重要なのは形状率 S という値で、簡単には全表面と自由表面の比率と考えると楽です。自由表面の割合が大きいほど、変形しやすくばねは小さくなるという考えのもと、古典的設計法として定義されています。これが真のヤング率が求められない理由で、適切な形状の試験片が必要です。

ブッシュのバネ定数 (半径方向)

ばね定数 $k = \pi(E+G)l / \ln(r_2/r_1)$

$E/G = 4 + 3.290S$

形状率 $S = l / \{(r_1+r_2) \cdot \ln(r_2/r_1)\}$

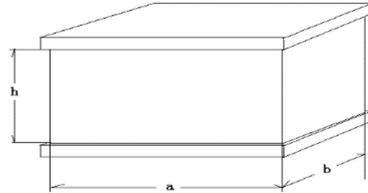


角柱のバネ定数(圧縮方向)

ばね定数 $k = E \cdot ab/h$

$E/G = 3 + 6.508S$

形状率 $S = ab / \{2(a+b)h\}$



参考：(社) 日本鉄道車両工業会出版 防振ゴム

つまり、式を簡略化するとばね定数 k は、

$k = G \cdot F \cdot D$

G:ゴムのせん断弾性率 F:形状によって決まる係数 D:ゴム部の寸法を代表する変数として、剛性 G と形状 D で決まるばねに、再度 F という形状で決まる係数を乗じていることが真のヤング率が簡単に求められない理由です。

結論として、経験上、短冊による試験でチャック間の変位と荷重をへたりを考慮した算出をすることが必要です。

へたりとは、自由長 L に対して

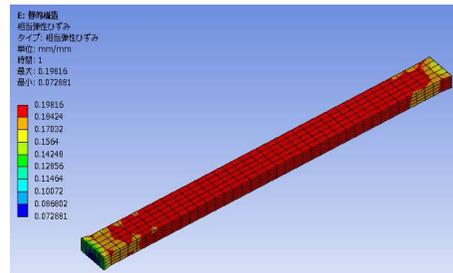
L+へたり で変位を割ること

ひずみ $\epsilon = \text{変位} / (L + \text{へたり})$ と

することが重要です。

へたりを考慮する場合としない場合で

一般的なゴム材は、5~10%のヤング率の差が生じ、これが特性の予測精度に最後まで影響することになります。



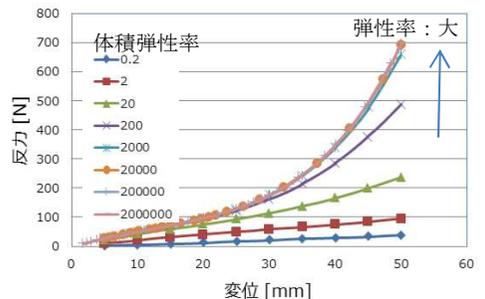
***** コーヒープレク：体積弾性率の変化による計算結果への影響 *****

上図短冊での伸びと荷重の関係を解析で体積弾性率を変えた場合、どうなるか検討しました。ひずみエネルギー密度関数は、マニュアルによっては体積弾性項が明確に示されていない場合があるため、注意しなければならないことがあります。

Mooney 高次式はひずみエネルギー密度関数 W

$$= C_{10}(I_1-3) + C_{01}(I_2-3) + C_{11}(I_1-3)(I_2-3) + C_{20}(I_1-3)^2 + C_{30}(I_1-3)^3 + K$$

K は体積弾性率の項で、エネルギー項と体積弾性率は独立しているように見えます。しかし、実際には体積弾性率を変化させると特性が変化します。



※ゴムの体積弾性率とポアソン比 藤本氏(芝浦工大)手塚氏(旭化成)日本ゴム協会誌 第 59 巻 第 7 号 (1986)

6 I章のまとめ：エネルギー関数の定義

ゴムの解析に必要なひずみエネルギー密度関数の定義は、各論で説明してきましたが、どの定義方法を用いても元のデータの精度に結果は依存するということです。時々、CGで何でも出てくると勘違いされる管理職の方がいらっしゃいます。また、綺麗な絵を見せられると、内容の良否に関係なく騙されてしまいがちですが、色付きのきれいな絵が出てきますが、それはただの結果ですので、単なる科学技術計算です。その点を踏まえてゴムの解析用材料定義は、次のことに気を付ける必要が在ります。

- i) 特性予測をするのは1回目、2回目、3回目以降どこでしょうか。
 - ii) へたりを考慮した剛性の特定になっていますか。
 - iii) 単軸よりも二軸試験からひずみエネルギー密度関数を定義したほうが大変形領域をより精度よく表現することが可能となります。
ただし、関数が万能でないことから予測範囲を特定して定義をすることが重要です。エネルギーを定義するための二軸試験機が限られているため、選定して使うなどは難しいので、試験機の特徴を理解し使用する必要があります。二軸試験の注意点は、
・均一変形 ・4角の荷重の処理 ・有効断面の考慮 ・(単軸同様)へたりの考慮
などがありますが、単軸試験での初期10%のヤング率と関係式で比較した方が良い。また、二軸試験機の制約などある場合も、補正の為、単軸のヤング率から補正を行う方が良い。(ヤング率 $E = 6(C_{10} + C_{01}) = (3/2) \sum \alpha_i \mu_i$ の関係)
 - iv) ゴムの変形は、ある程度(金属との接着など)拘束面がある場合、変形は合ってくるものなので、変形が合っているから、その材料定義が正しいと勘違いしない。
 - v) エネルギー密度がマイナスにならないよう、また、途中でおかしい傾向が見られないようにエネルギー密度分布は確認する必要があります。
 - vi) 時間依存、例えばシールの何分過去後の面圧などと時間依存を考慮しなければならぬ領を考慮する。(この点は、少しこの後で触れます)
- これらのことを確認する必要があります。

7 超弾性から粘弾性

簡単な形状であるo-リングの解析でも反力・面圧など、うまくいかないなど相談を受けることが多くなっています。o-リングのような単純な形状、ましてこの形状は摩擦の影響を受けにくい形状なので難しい解析ではないと考えていました。

しかし、いろいろと考えていると、ヒステリシス（損失荷重）の大きい材料の場合は、それらを考慮する必要があることに気付かされました。注意点、資料をホームページのお役立ち資料にあげております。

では、面圧を求めるのはどうしたら良いでしょうか。面圧測定を実際に測定するという問題は残りますが。

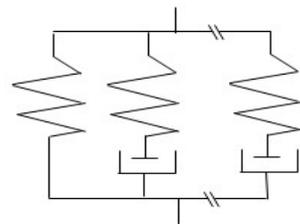
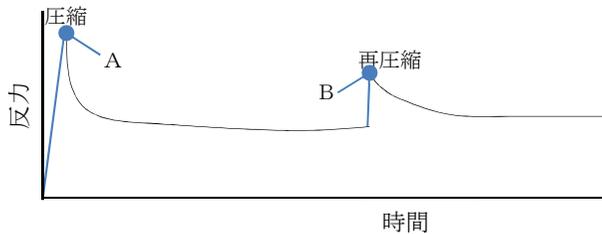
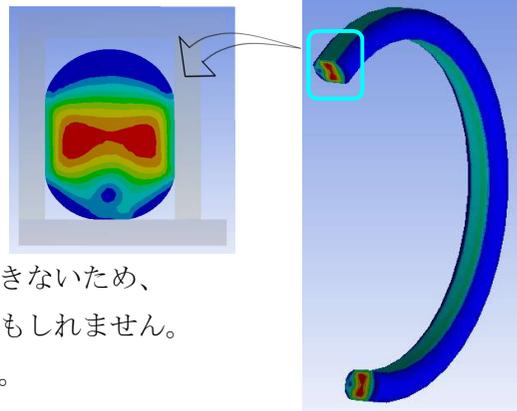
面圧、では時間軸でどこの時間の面圧を測定しているのでしょうか。面圧が測定できないため、セット時の反力で検証することを試みるかもしれません。反力は、まず圧縮時にA点まで上昇します。

次に、時間とともに緩和して荷重が小さくなり、再度圧縮すると再度荷重上昇、時間と共に緩和します。
(再度圧縮するとB点へ)

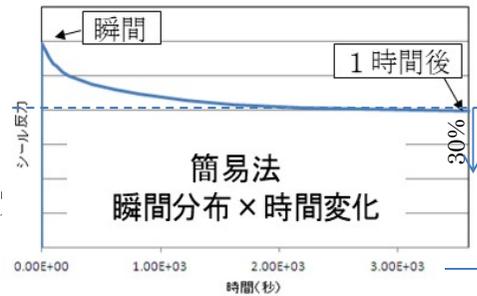
粘弾性の解析をするには、動的な緩和定義が必要です。緩和を貯蔵弾性率E'とE'' でマスターカーブを表現します。結果、次のように表せます。

$$\sigma(t) = \varepsilon(t) \sum_{i=1}^N E_i e^{-t/\tau_i} + \varepsilon(t) \sum E e$$

これらを正確に定義する場合、粘弾性測定器で多大な時間と労力、知恵も少し出して定義しなければなりません。これを定義すると、再圧縮B点も表現することができます。



しかし、その労力（費用）を低減する1つの方法として応力緩和試験があります。短冊で伸張して、時間による緩和状況を測定します。簡易的に推定するには、超弾性での解析+緩和時間として考えると意外に合います。手順として、超弾性での変形解析を行い、例えば1時間後の緩和が30%の場合、超弾性の解析荷重に0.7(70%)を乗じることで求められます。コストでどうするか考えればよいと考えています。（粘弾性測定、大変です）



粘弾性測定を行う場合、詳細は説明しませんが、できるだけ幅広い周波数帯を定義するため、温度を低温から高温まで変化させて、時間-温度返還を行うことで領域を広げることができます。また、その時気を付けるべきは、**ゴムの発熱で、どこの温度を測定しているか**、しっかり把握する必要があります。

ゴムの特性として、温度依存性、速度依存性（粘弾性定義）、履歴依存性（ダメージ関数）、発熱、熱膨張、いろいろと定義する必要があります。

また、似ているようで樹脂材料の定義もあり、ゴムの表現式では難しく、その場合金属材料のヤング率、ポアソン比、降伏応力、加工硬化係数での表現が使えます。

なるべく説明したく、できる限りのノウハウを書いたつもりですが、描き切れていない、不明な点は“ゴムの解析 寺子屋2018”で検索すると出てくると思いますので、気軽に質問コーナーからお問い合わせ下さい。

寺子屋 <https://terakoya2018.com/>

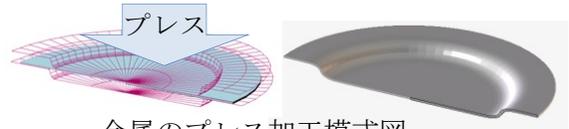
***** コーヒーブレイク：この時代の管理者の役割、分業と任せるとのこと

偉そうなことを書いていますので、簡潔にします。CAEを詳細まで理解している管理者は少ないはず。そんな時、どう管理していくかは技術的な見方をすれば自ずと見えてきます。担当者の説明が如何に論理的で説得力があるかを判断、ただし、部下の力量を見極めたうえで考えると大きな間違いはないと感じています。技術的に考えて“何かおかしい???”を考えればよいことで、任せることと勝手にやらせるということを勘違いしないことです。1991年、上司と二人三脚、いろいろなことを教えてもらいながらCAEの専門的なところは任せて頂き、組み立てについてはしっかりと軌道修正が入り、往ったり来たりしながら多くの失敗をさせて頂きながら進んできました。

II 超弾性体の解析

0 概要：解析の考え方/熱収縮も

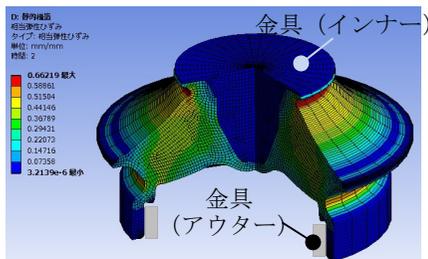
材料として非線形性もあり、また、柔らかいゴムを扱う意味で解析は金属と異なりますが、金属の板金加工品における残留応力、残留ひずみはゴムでも製造工程によるゴムの熱履歴により同様に考慮することが必要です。



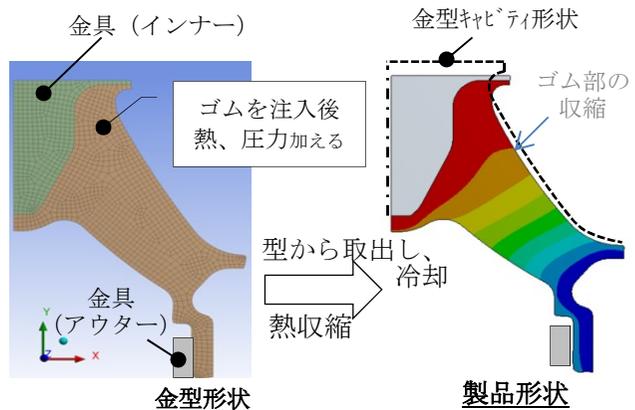
金属のプレス加工模式図

前項でも説明しましたが、

大まか言えば160℃前後に熱した金型に、接着剤を塗った金具を金型にセットし、そこへ加熱したゴムを流し込む。その後熱と圧力を加えることにより架橋という反応が進み、ゴムと金具が接着するとともにゴム自身も架橋反応により形が固定され、流動的であったゴムが変形から元の形に戻るものになります。



金型円錐型エンジンマウント

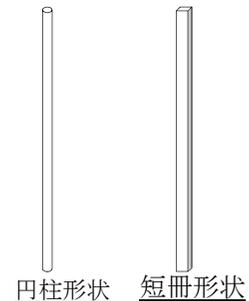


円錐型エンジンマウントの例で

金型と製品の関係を表しました。金具も全く熱で変形しないわけではありませんが、このような金具との接着製品は、金型から取り出すと室温へ戻るときの熱収縮により不均一な収縮（金具よりもゴムの収縮が大きい）があるため金属プレスの金具と同様、残留ひずみ/残留応力が発生し、後の、ひずみや特性予測精度に大きく影響してきます。

これらを解析するには、熱的解析を可能にする熱伝導度、熱伝達、比熱、熱膨張係数を定義する必要がありますので線熱膨張係数は1℃当たりの線膨張率なので、右図のように円柱、短冊形状での測定で求められます。

恒温槽にまっすぐ伸びるガイド（治具）に入れて拘束や摩擦の影響が無いように、恒温槽に入れた寸法と室温に



戻った寸法を、1℃で何倍（一般的 1.5×10^{-4} 程度）になるかを求めれば、その数値が使えます。熱伝導、伝達、比熱は使わない熱応力解析で十分です。